

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Conditions aux limites absorbantes d'ordre  
élevé pour l'équation des ondes 3D.***

Francis Collino

**N 2932**

Juillet 1996

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_



***apport  
de recherche***



## Conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé pour l'équation des ondes 3D.

Francis Collino

Thème 4 — Simulation  
et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 2932 — Juillet 1996 — 65 pages

**Résumé :** On propose une généralisation des conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé à l'équation des ondes 3D avec ou sans terme d'amortissement. On établit, pour les boîtes de calcul parallélipédiques, des conditions d'arêtes et de coin qui permettent de poser correctement le problème. Un schéma numérique et son algorithme associé est présenté. Un exemple numérique illustre la méthode.

**Mots-clé :** Condition aux limites absorbante, équation des ondes, équations des ondes amorties

*(Abstract: pto)*

Ce travail a utilisé les moyens de calcul de l'IDRIS

# Higher Order Absorbing Boundary Conditions for the 3-D Wave Equation

**Abstract:** A generalization of higher order absorbing boundary conditions to the 3-D, possibly damped, wave equation is proposed. Some edge and corner conditions are derived to set up the problem properly. A numerical scheme and its associated algorithm is described. A numerical experiment illustrates the method.

**Key-words:** Absorbing Boundary Condition, Wave Equation, Damped Wave Equation

# 1 Introduction

Ce rapport est consacré à la présentation d'un schéma numérique pour la discrétisation des conditions aux limites absorbantes (CLA) d'ordre élevé pour l'équation des ondes 3D.

Plus précisément, on s'intéresse aux solutions de l'équation

$$\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma(z) \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

dans un domaine parallélépipédique.

Le problème des bords absorbants est de déterminer des conditions appropriées sur le bord du domaine de calcul qui simulent le caractère “sortant” des solutions que l'on recherche. La détermination de “bonnes” conditions, c'est à dire des conditions stables, précises et peu coûteuse en temps de calcul, a donné lieu à une recherche très inventive et diversifiée: depuis les premiers travaux, [6], [11], jusqu'à des développements plus récents, [8], [1]. Pour une vue plus complète sur la question, on pourra consulter [7] et [9]. Dans ce travail, nous choisissons de mettre en œuvre les conditions qui ont été développées dans un précédent rapport, [4]. La méthode consiste à imposer sur chaque face du cube de calcul une CLA d'ordre élevé à l'aide d'une approximation paraxiale à  $L$  fractions rationnelles (approximation grand angle). Des conditions d'arête et de coin appropriées complètent le système. En fait, ces conditions sont ici généralisées au cas d'un milieu stratifié horizontalement. Toutes les équations composant les CLA du cas homogène étant locales, cette généralisation ne pose pas de problème méthodologique important, si ce n'est dans le choix de la position des paramètres par rapport aux opérateurs différentiels (par exemple  $c^2 \partial_z^2$  peut s'écrire  $c(z)^2 \partial_z^2$  ou  $c(z) \partial_z c(z) \partial_z$ ). Pour statuer sur cette indétermination, nous nous sommes inspirés des travaux de Bamberger et al., [2], portant sur les équations paraxiales en milieu hétérogène sans toutefois apporter de justification sur ce point.

L'originalité de notre approche est double. D'une part, dans la formulation (utilisation de fonctions auxiliaires permettant une résolution simple du schéma, même lorsque  $L$  est grand, conditions d'arêtes et de coin), et d'autre part et indépendamment, dans la prise en compte du terme d'amortissement, ce qui n'a pas été très étudié jusqu'à maintenant.

Le rapport est organisé en cinq sections, introduction comprise. Dans la section 2, on construit les conditions aux limites absorbantes, conditions de face d'arêtes et de coin, pour l'équation des ondes amorties en milieu homogène. Ces conditions sont obtenues très facilement en adaptant ce que nous avons fait pour l'équation des ondes non amorties. La section 3 est dédiée à une présentation des notations utilisées pour la discrétisation. Celles-ci sont assez lourdes de par la multiplicité des indices intervenant dans la formulation des problèmes continu et surtout discrétisé. La section 4 traite, successivement, le cas des faces, des arêtes et des coins. Pour chacune de ces trois géométries, on présente sans trop s'appesantir une formulation généralisant au cas stratifié les problèmes continus et leur discrétisation. Dans une seconde étape, on explicite la récurrence en temps du schéma. Enfin, on donne *in extenso* dans une sous-section qui peut être lue indépendamment de ce qui la précède, un algorithme de résolution en vue d'une implémentation sur ordinateur. Dans une dernière partie (section 5) est présenté un exemple numérique qui conclue le rapport.

## 2 Conditions absorbantes pour l'équation des ondes amorties

### 2.1 Introduction

Dans cette section, nous nous proposons d'étendre les conditions d'ordre élevé pour un domaine parallélépipédique au cas de l'équation des ondes amorties 3D. Pour cela, on reprend la démarche suivie dans [4]. On commence par construire des CLA adaptées au cas du demi-espace, puis on exhibe des conditions d'arête et de coin pour clore le système posé dans un huitième d'espace. Ces conditions peuvent alors être utilisées pour définir complètement un système d'équations pour les CLA du parallélépipède.

### 2.2 Cas du demi-espace

Pour le demi-espace, la construction des CLA se fait de la manière suivante. On commence par montrer que la solution du problème ( $\mathcal{P}'$ ):

$$(\mathcal{P}') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ u(t=0) = u_0 \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \\ \text{Support de } u_0 \text{ et de } u_1 \subset \{y < 0\} \end{array} \right.$$

est telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} + T \cdot u = 0 \quad \forall y \geq -\delta \\ \text{avec } \widehat{T \cdot v} = i(\omega^2 - i\sigma\omega - |k|^2)^{1/2} \cdot \hat{v} \\ \text{et } |k|^2 = k_z^2 + k_x^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\hat{v}$  est la transformée de Fourier de  $v$  en  $z, x$  et  $t$ . En supposant  $\frac{i\sigma}{\omega} + \frac{|k|^2}{\omega^2}$  petit, on peut s'appuyer sur l'approximation (cf [2], [12])

$$\begin{aligned} \forall x, |x| < 1, \quad \sqrt{1-x} &\approx 1 - \sum_{l=1}^L \beta_l \frac{x}{1-\alpha_l x} = \gamma - \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l} \frac{1}{1-\alpha_l x} \\ \gamma &= 1 + \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l} \end{aligned}$$

pour écrire

$$(\omega^2 - i\sigma\omega - |k|^2)^{1/2} \approx \omega \left( \gamma - \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \alpha_l(i\sigma\omega + |k|^2)} \right)$$

ce qui conduit à l'équation approchée

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{u}}{dy} + i\omega \left( \gamma \hat{u} - \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l} \hat{\psi}_l \right) = 0 \\ \omega^2 \hat{\psi}_l^2 - \alpha_l(i\sigma\omega + |k|^2) \hat{\psi}_l = \omega^2 \hat{u}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Ce système d'équations se réinterprète dans le domaine espace-temps par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{l=1}^L \beta_l \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial t^2} - \alpha_l \left( \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial \psi_l}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{/y=0} \end{cases} \quad l = 1, \dots, L \quad (3)$$

On aboutit ainsi à un système de  $L$  équations des ondes amorties  $2D$  couplées avec une équation de transport dans la direction  $y$ .

## 2.3 Cas du huitième d'espace: détermination des conditions d'arête et de coin

### 2.3.1 Position du problème

On définit

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x, y, z < 0 \right\}$$

ainsi que les faces et les arêtes

$$\partial\Omega = F^{(x)} \cup F^{(y)} \cup F^{(z)}$$

$$\Gamma^{(x)} = F^{(y)} \cap F^{(z)}, \quad \Gamma^{(y)} = F^{(z)} \cap F^{(x)}, \quad \Gamma^{(z)} = F^{(y)} \cap F^{(x)}$$

Le système d'équations généralisant la situation du demi-espace est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{puis, sur chaque } F^{(a)}, \quad a = x, y, z : \\ \frac{\partial u}{\partial a} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\partial \psi_m^{(a)}}{\partial t} = 0, \quad \text{et, } \forall l = 1, \dots, L, \\ \frac{\partial^2 \psi_l^{(a)}}{\partial t^2} - \alpha_m \left( -\sigma \frac{\partial \psi_l^{(a)}}{\partial t} + \Delta_T^{(a)} \psi_l^{(i)} \right) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{/F^{(a)}} \end{cases} \quad (4)$$



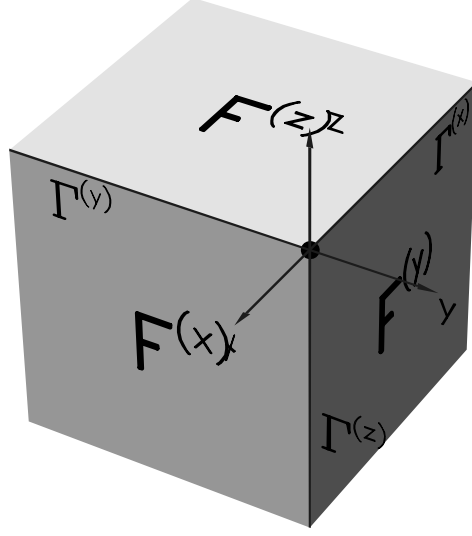


FIG. 1 – Représentation schématique du huitième d'espace

où  $\Delta_T^{(a)}$  est le Laplacien tangentiel

$$\Delta_T^{(a)} = \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \quad \text{sur } F^{(a)}, \quad a, b, c \text{ distincts.}$$

Le problème que pose cette formulation, est lié aux conditions de raccordement que doivent satisfaire les fonctions auxiliaires sur les trois demi-droites où s'intersectent les faces. Ces conditions sont cruciales pour toute implémentation numérique. En effet, les fonctions auxiliaires satisfont une équation des ondes 2D sur leur surface, équation qui est d'ordre 2 (i.e. qui fait intervenir des dérivées secondes) par rapport au coordonnées d'espace. Or, il est impossible d'évaluer numériquement ces dérivées secondes sans l'adjonction de conditions, portant, par exemple, sur les dérivées normales. Comme on a  $2L$  dérivées secondes à évaluer par arête ( $L$  sur chacune des deux faces d'appui), il nous faut définir  $2L$  conditions par arête.

On va déterminer celles-ci en deux étapes en suivant la même démarche que [4] pour l'équation des ondes 3D non amorties. Tout d'abord, on construit

toute une famille de solutions particulières, très régulières, du problème (4). Ces solutions sont obtenues par combinaison d'ondes planes. Puis, dans une seconde étape, on détermine  $2L$  équations satisfaites le long de chaque arête par toutes les solutions particulières et dont les expressions sont intrinsèques.

### 2.3.2 Construction de la famille de solutions particulières

Pour  $k = (k_x, k_y, k_z)$  fixés, nous recherchons une solution de (4) sous la forme d'une somme de huit ondes planes

$$u(x, y, z, t) = \left( \exp ik_x x + R^{(x)} \exp -ik_x x \right) \left( \exp ik_y y + R^{(y)} \exp -ik_y y \right) \\ \left( \exp ik_z z + R^{(z)} \exp -ik_z z \right) \exp^{-i\omega t}$$

où  $\omega$  est relié à  $k$  par la relation

$$\omega^2 + i\sigma\omega = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Les fonctions auxiliaires sont recherchées proportionnelles aux traces de  $u$  sur la face associée

$$\psi_l^{(a)}(b, c, t) = \Psi_l^{(a)} \cdot u(b, c)_{/a=0}, \quad (a, b, c) \text{ distincts.}$$

De telles solutions existent. En effet, des calculs élémentaires montrent que les équations des ondes 2D sont satisfaites sur chacune des trois faces dès que

$$\Psi_l^{(a)} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \alpha_l(\omega^2 - k_a^2)}, \quad a = x, y, z, \quad (5)$$

En outre, les équations reliant les dérivées normales aux fonctions auxiliaires sont vérifiées lorsque

$$k_a \frac{1 - R^{(a)}}{1 + R^{(a)}} = \gamma - \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l} \Psi_l^{(a)}, \quad a = x, y, z. \quad (6)$$

A ce stade, on a donc bien construit toute une famille de solutions particulières à notre problème.

### 2.3.3 Conditions d'arêtes

On s'intéresse à l'arête  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z < 0$ . On cherche à raccorder les 2 familles de fonctions

$$\psi_l^{(y)}(z, x = 0, t) \quad (\text{relatives à la face } y = 0)$$

$$\psi_l^{(x)}(y = 0, z, t) \quad (\text{relatives à la face } x = 0)$$

On forme

$$\frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial y}(y = 0, z, t) = \Psi_l^{(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x = 0, y = 0, z, t)$$

Soit

$$\frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial y}(y = 0, z, t) = \Psi_l^{(x)} \imath k_y \left(1 + R^{(x)}\right) \left(1 - R^{(y)}\right) A(z, t)$$

avec

$$A(z, t) = \left(\exp^{\imath k_z z} - R^{(z)} \exp^{-\imath k_z z}\right) \exp^{-\imath \omega t}$$

D'où (voir (6) avec  $a = y$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial y}(y = 0, z, t) &= \left(\imath k_y \frac{1 - R^{(y)}}{1 + R^{(y)}}\right) \Psi_l^{(x)} \left(1 + R^{(x)}\right) \left(1 + R^{(y)}\right) A(z, t) \\ &= \imath \omega \left(\gamma - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(y)}\right) \Psi_l^{(x)} \left(1 + R^{(x)}\right) \left(1 + R^{(y)}\right) A(z, t) \end{aligned}$$

Et donc

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial y}(y = 0, z, t) &= -\gamma \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial t}(y = 0, z, t) \\ &\quad - \sum_{m=1}^L \imath \omega \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(y)} \Psi_l^{(x)} \left(1 + R^{(x)}\right) \left(1 + R^{(y)}\right) A(z, t) \end{aligned} \right.$$

Pour se débarrasser du terme non linéaire, on va utiliser la décomposition

$$\begin{cases} \Psi_l^{(x)} \cdot \Psi_m^{(y)} = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \left( \frac{\gamma_{l,m}}{\alpha_m} \Psi_l^{(x)} + \frac{\gamma_{l,m}}{\alpha_l} \Psi_m^{(y)} \right) \\ \text{avec } \Psi_{l,m}^{(z)} = \frac{1}{\omega^2 + \gamma_{l,m}(\imath\sigma\omega - k_z^2)} \\ \text{et } \gamma_{l,m} = \frac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \end{cases} \quad (7)$$

(Utiliser  $(1 - \alpha_m)\omega^2 + \alpha_m k_x^2 = \omega^2 - \alpha_m(\omega^2 + \imath\sigma\omega - k_y^2 - k_z^2)$  et faire la décomposition en éléments simples du produit  $\Psi_l^{(x)} \cdot \Psi_m^{(y)}$  suivant  $k_y$ ,  $k_z$  et  $\omega$  étant des paramètres.)

On a donc

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} (\imath\omega) \Psi_l^{(x)} \Psi_m^{(y)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) = \\ &= \imath\omega \left( \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \left( \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) \right) \right) + \\ &+ \imath\omega \left( \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \left( \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_m^{(y)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) \right) \right) \end{aligned}$$

On vérifie alors que si l'on définit les deux familles de fonctions d'arête

$$\psi_{l,m}^{(y,z)}(z, t) \text{ relative à la face } y \text{ et } \psi_{l,m}^{(x,z)}(z, t) \text{ relative à la face } x$$

comme les solutions des équations des ondes 1D le long de l'arête

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left( \sigma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \psi_l^{(y)}}{\partial t^2}(z, x = 0, t) \\ \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left( \sigma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \psi_l^{(x)}}{\partial t^2}(y = 0, z, t), \end{cases} \quad (8)$$

et qui sont données par

$$\begin{aligned} \psi_{l,m}^{(y,z)}(z, t) &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \psi_l^{(y)}(z, x = 0, t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(y)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{l,m}^{(x,z)}(z, t) &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \psi_l^{(x)}(z, x = 0, t) \\
&= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \left(1 + R^{(x)}\right) \left(1 + R^{(y)}\right) A(z, t),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial y}(z, y = 0, t) &= -\gamma \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial t}(z, x = 0, t) + \\ &+ \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(z, t) + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t}(z, t). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Ceci constitue les  $L$  premières conditions d'arête ( $l$  varie de 1 à  $L$ ). On en obtient  $L$  autres en intervertissant les rôles de  $x$  et de  $y$ . On a

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi_l^{(y)}}{\partial x}(z, x = 0, t) &= -\gamma \frac{\partial \psi_l^{(y)}}{\partial t}(z, x = 0, t) + \\ &+ \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t}(z, t) + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t}(z, t). \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Enfin, en faisant tourner deux fois les indices  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on construit  $2 \times 2L$  conditions supplémentaires. Au final,  $6L$  conditions sont obtenues qui sont intrinsèques car indépendantes de  $(k_x, k_y, k_z)$ . On remarquera que tous ces calculs sont très analogues à ceux que nous avons faits lors de l'étude des C.L.A. d'ordre élevé pour l'équation des ondes 3D et sont basés sur la décomposition en éléments simples (7).

### 2.3.4 Détermination des conditions de coin

Nos conditions d'arêtes font intervenir des dérivées secondes en la variable tangente de l'arête. Lorsque l'on se place au coin du domaine, il est impossible numériquement d'évaluer ces dérivées. On se retrouve dans une situation analogue à la précédente, substituant à la problématique faces, arêtes, celle des arêtes et des coins. En dressant une liste exhaustive des équations d'arête, on peut dénombrer  $6L^2$  quantités manquantes qui sont (par exemple)

$$\frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b}(0, t) \quad a, b = x, y \text{ ou } z, \quad a \neq b \quad l, m = 1, \dots, L.$$

L'objet de ce qui va suivre est donc de dériver  $6L^2$  relations satisfaites au coin par la famille de solutions particulières et de lever ainsi l'indétermination.

(Dans la suite, on notera  $B(t) = (1 + R^{(x)})(1 + R^{(y)})(1 - R^{(z)}) \exp^{-i\omega t}$

et  $A(t) = (1 + R^{(x)})(1 + R^{(y)})(1 + R^{(z)}) \exp^{-i\omega t}$ ).

On fixe  $l, m$  et on s'intéresse à la composante  $z$ , on va relier

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial z}(0, 0, t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \frac{\partial u}{\partial z}(0, 0, 0, t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} i k_z B(t), \end{aligned} \right.$$

avec

$$\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) = -\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} i\omega A(t),$$

et encore ( $n = 1, \dots, L$ )

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi_{n,l}^{(z,y)}}{\partial t}(0, t) &= \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \frac{\partial \psi_n^{(z)}}{\partial t}(0, 0, t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \Psi_n^{(z)} (-i\omega) A(t). \end{aligned} \right.$$

Pour cela, on commence par écrire

$$\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \left( \gamma - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n}{\alpha_n} \Psi_n^{(z)} \right) (i\omega) A(t), \quad (11)$$

car, d'après (6)

$$k_z B(t) = \frac{k_z(1 - R^{(z)})}{(1 + R^{(z)})} A(t) = \omega \left( \gamma - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n}{\alpha_n} \Psi_n^{(z)} \right) A(t). \quad (12)$$

On est donc amené à décomposer des expressions de la forme  $\Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \Psi_n^{(z)}$ . C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 0.1** On a

$$\Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \Psi_n^{(z)} = \zeta_{l,m,n}(\omega) \left( \frac{\gamma_{l,m,n} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}}{\alpha_n} + \frac{\gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l} \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_n^{(z)}}{\gamma_{l,m} \alpha_l} + \frac{\gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l} \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_l^{(x)}}{\gamma_{l,m} \alpha_n} \right),$$

avec

$$\begin{cases} \zeta_{l,m,n}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \imath \gamma_{l,m,n} \sigma \omega}, \\ \gamma_{l,m,n} = \frac{\gamma_{l,m} \alpha_n}{\alpha_n + \gamma_{l,m} - \alpha_n \gamma_{l,m}} = \frac{\alpha_l \alpha_n \alpha_m}{\alpha_n \alpha_m + \alpha_m \alpha_l + \alpha_m \alpha_n - 2 \alpha_n \alpha_m \alpha_l}. \end{cases}$$

Vérification : On a

$$\Psi_{l,m}^{(z)} = \frac{1}{\omega^2 + \gamma_{l,m}(\imath \sigma \omega - k_z^2)}, \quad \Psi_n^{(z)} = \frac{\omega^2}{(1 - \alpha_n) \omega^2 + \alpha_n k_z^2}.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_n^{(z)} &= \frac{\omega^2}{((1 - \alpha_n) \omega^2 + \alpha_n k_z^2) (\omega^2 + \gamma_{l,m}(\imath \sigma \omega - k_z^2))} \\ &= \alpha_n C \Psi_n^{(z)} \omega^{-2} + \gamma_{l,m} C \Psi_{l,m}^{(x)} \quad (C \text{ à déterminer}) \\ &= \frac{\alpha_n C}{(1 - \alpha_n) \omega^2 + \alpha_n k_z^2} + \frac{\gamma_{l,m} C}{\omega^2 + \gamma_{l,m}(\imath \sigma \omega - k_z^2)} \\ &= C \cdot \frac{\omega^2 (\alpha_n + \gamma_{l,m} - \alpha_n \gamma_{l,m}) + \imath \sigma \omega \gamma_{l,m} \alpha_n}{((1 - \alpha_n) \omega^2 + \alpha_n k_z^2) (\omega^2 + \gamma_{l,m}(\imath \sigma \omega - k_z^2))} \\ \Rightarrow C &= \frac{\omega^2}{\alpha_n \gamma_{l,m}} \cdot \frac{\gamma_{l,m,n}}{(\omega^2 + \imath \sigma \omega \gamma_{l,m,n})} = \frac{\gamma_{l,m,n}}{\alpha_n \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega), \end{aligned}$$

d'où, en utilisant une relation analogue à (7)

$$\begin{aligned} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_n^{(z)} \Psi_l^{(x)} &= \left[ \frac{\gamma_{l,m,n} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}}{\alpha_n} + \frac{\gamma_{l,m,n} \Psi_n^{(z)} \Psi_l^{(x)}}{\gamma_{l,m} \omega^2} \right] \zeta_{l,m,n}(\omega) = \\ &= \left[ \frac{\gamma_{l,m,n} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}}{\alpha_n} + \frac{\gamma_{l,m,n} \Psi_{l,n}^{(y)} \left( \frac{\gamma_{n,l}}{\alpha_l} \Psi_n^{(z)} + \frac{\gamma_{n,l}}{\alpha_n} \Psi_l^{(x)} \right)}{\gamma_{l,m}} \right] \zeta_{l,m,n}(\omega). \blacksquare \end{aligned}$$

On a donc (on reprend (11))

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) &= \gamma \left( \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}(\imath \omega) A(t) \right) \\
&- \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \zeta_{l,m,n} \left( \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}(\imath \omega A(t)) \right) \\
&- \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n} \left( \omega^2 \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_n^{(z)}(\imath \omega A(t)) \right) \\
&- \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n} \left( \omega^2 \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_l^{(x)}(\imath \omega A(t)) \right).
\end{aligned}$$

En rapprochant cette égalité avec les expressions données plus haut, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) &= -\gamma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) \\
&+ \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) \\
&+ \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial \psi_{n,l}^{(z,y)}}{\partial t}(0, t) \\
&+ \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial \psi_{l,n}^{(x,y)}}{\partial t}(0, t).
\end{aligned} \tag{13}$$

On est ainsi amené à distinguer deux cas suivant que  $\sigma$  est nul ou non. En effet, dans le premier cas  $\zeta_{l,m,n}(\omega)$  est égal à 1 et la relation ci-dessus est bien une relation indépendante de la famille de solutions vérifiée au coin. Si  $\sigma$  est non nul il faut définir de nouvelles fonctions auxiliaires, soient

$$\begin{cases} \psi_{l,m,n}^{(a,b)}(t) = \zeta_{l,m,n}(\omega) \psi_{l,m}^{(a,b)}(b = 0, t), \\ a, b = x, y, \text{ ou } z, \ a \neq b, \ l, m = 1, \dots, L, \end{cases}$$

qui sont solutions des équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\psi_{l,m,n}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,n} \sigma \psi_{l,m,n}^{(a,b)}(t) = \frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial t}(b = 0, t). \tag{14}$$



(13) se réécrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0,t) = -\gamma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0,t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \frac{\partial \psi_{l,m,n}^{(x,z)}}{\partial t}(t) \\ + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{\partial \psi_{n,l,m}^{(z,y)}}{\partial t}(t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \frac{\partial \psi_{l,n,m}^{(x,y)}}{\partial t}(t). \end{array} \right. \quad (15)$$

(15) fournit  $L^2$  conditions de coin. On obtient  $L^2$  conditions supplémentaires en échangeant  $x$  et  $y$ ,  $z$  restant fixé. Enfin, en faisant tourner les indices  $x, y$  et  $z$ , on arrive aux 6  $L^2$  relations recherchées.

### 3 Notations

Dans cette section, on définit les notations qui vont être utilisées pour discrétiser les CLA obtenues dans la section précédente et que l'on va généraliser aux milieux stratifiés et à une boîte de calcul bornée (12 arêtes et 8 coins, au lieu des 3 arêtes et du coin du huitième d'espace).

#### 3.1 Variables d'espace

- Les coordonnées sont  $x$ ,  $y$  et  $z$
- Les pas de discrétisation sont constants dans chaque direction. On les note  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$ .
- La discrétisation spatiale fait intervenir les nœuds

$$\boxed{x_i = i\Delta x, \quad y_j = j\Delta y, \quad z_k = k\Delta z}$$

Ainsi,  $i$  est l'indice en  $x$ ,  $j$  est l'indice en  $y$  et  $k$  est l'indice en  $z$ .

- Les indices  $i$ ,  $j$ ,  $k$  peuvent varier au plus entre 1 et  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ .
- Si  $F$  est une fonction d'une variable d'espace, par exemple  $F(x)$ , on notera  $F_i$  ces valeurs prises aux nœuds. L'indice spatial est donc toujours situé en bas et à droite du symbole de la fonction.

$$F_i = F(x_i).$$

Ces notations s'étendent facilement aux fonctions de plusieurs variables

$$\text{Exemples: } G_{i,j} = G(x_i, y_j).$$

- Le symbole  $\otimes$  désignera toujours la coordonnée d'un plan frontière ou celle du plan immédiatement voisin à ce plan.

### 3.2 Variable temporelle

- $t$  désigne le temps.  $\Delta t$  est le pas de temps.

$$t_n = n\Delta t,$$

$n$  est ainsi l'indice en temps.

- Si  $F$  est une fonction du temps, on notera  $F^n$  ces valeurs prises aux instants  $t_n$ . L'indice temporel est donc toujours situé en haut et à droite du symbole de la fonction.

$$F^n = F(t_n).$$

On peut bien sûr combiner ces notations avec celles relatives aux variables spatiales.

$$\text{Exemples : } G_{i,j}^n = G(x_i, y_j, t_n).$$

### 3.3 Paramètres décrivant la physique

Le physique du problème est supposée stratifiée suivant la variable verticale  $z$ , les points de stratification coïncidant avec des nœuds du maillage. On caractérise le milieu par la donnée des paramètres  $c$  et  $\sigma$  comme respectivement la vitesse et l'amortissement du milieu. On suppose ces paramètres constants entre deux points du maillage, on définit

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum_k \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[(k-1)\Delta z, k\Delta z]}(z), \\ \sigma(z) &= \sum_k \tilde{\sigma}_{k-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[(k-1)\Delta z, k\Delta z]}(z). \end{aligned}$$

Outre les  $\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}$ , le schéma va faire intervenir les paramètres

$$\begin{aligned} (\sigma c)_k &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\sigma}_{k+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{\sigma}_{k-\frac{1}{2}} \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{1}{\tilde{c}_k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

### 3.4 Paramètres pour la CLA

La CLA est déterminée par la donnée

- D'un entier positif ou nul noté  $L$ ,
- De  $2L$  paramètres positifs notés  $\alpha_l$  et  $\beta_l$ ,  $l$  variant de 1 à  $L$ .  
 $\alpha_l$  et  $\beta_l$  sont choisis tels que l'on ait

$$\forall |x| < 1 \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \sum_{l=1}^L \beta_l \frac{x}{1-\alpha_l x} = \gamma - \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l} \frac{1}{1-\alpha_l x},$$

expression dans laquelle on a introduit

$$\gamma = 1 + \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l}.$$

$\gamma$  est un paramètre qui sera fréquemment utilisé. Enfin, pour des raisons de stabilité, [12], [5], il est conseillé de s'assurer de

$$\sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{1-\alpha_l} < 1.$$

Les coefficients les plus utilisés sont les coefficients de Padé

$$\begin{cases} \beta_l &= \frac{2}{2L+1} \sin^2 \left( \frac{l\pi}{2L+1} \right) \\ \alpha_l &= \cos^2 \left( \frac{l\pi}{2L+1} \right). \end{cases} \quad (16)$$

### 3.5 Notations pour le cube

Le cube de calcul est composé des valeurs du champ acoustique aux noeuds de la grille de calcul. On note  $u$  ce champ. La discrétisation des équations doit permettre de calculer  $u$  sur la grille de pas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$ , c'est à dire,

$$u_{i,j,k}^n \approx u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$$

### 3.6 Notations pour les faces

Le cube de calcul, (comme tout cube qui se respecte) possède six faces. On convient de repérer chaque face par son vecteur normal. On notera par un  $x$  entre parenthèse soit  $^{(x)}$  les deux faces dont la normale orientée est  $\pm\hat{x}$ . Les deux faces seront discriminées par le signe  $\pm$  de la normale à la face. On associera  $\varepsilon_x = 1$  pour le signe positif et  $\varepsilon_x = -1$  pour le signe négatif. En substituant  $y$  ou  $z$  à  $x$ . On caractérise ainsi les six faces

face $x^+$ : indice $^{(x)}$ , $\varepsilon_x = +1$	face $x^-$ : indice $^{(x)}$ , $\varepsilon_x = -1$
face $y^+$ : indice $^{(y)}$ , $\varepsilon_y = +1$	face $y^-$ : indice $^{(y)}$ , $\varepsilon_y = -1$
face $z^+$ : indice $^{(z)}$ , $\varepsilon_z = +1$	face $z^-$ : indice $^{(z)}$ , $\varepsilon_z = -1$

Sur chaque face on définit des fonctions de face.

On en distingue deux types, les fonctions auxiliaires de face et les traces du champ acoustique sur les plans frontières.

Les fonctions auxiliaires de face prennent leur valeur sur le plan considéré. On en compte  $L + 1$  par plan (le “+1” sera expliqué plus bas). Leur notation se construit progressivement de la manière suivante:

- $\psi_l$  désigne la  $l$ ème fonction vectorielle.
- $\psi_l^{(x)}$  précise qu’il s’agit d’une fonction relative à une face dont la normale est  $\pm\hat{x}$ . En fait on devrait noter  $\psi_l^{(x^+)}$  ou  $\psi_l^{(x^-)}$ . Mais les deux faces  $^{(x^+)}$  et  $^{(x^-)}$  ne s’intersectant pas l’algorithme de calcul ne fait jamais intervenir ces deux fonctions en même temps et on allège la notation sans confusion possible. Enfin  $\psi_l^{(x)}$  sont des fonctions des variables  $y, z$  et  $t$ . On obtient finalement,

$$\psi_l^{(x)}(y, z, t).$$

Pour étendre ces notations au cas des faces  $^{(y)}$  et  $^{(z)}$ , on a choisi de “faire tourner les indices” des notations précédemment décrites. L’intérêt de cette manière de faire est de permettre de n’écrire qu’un seul algorithme pour chacun des trois types de face et ainsi de n’avoir à coder qu’un seul sous-programme, la rotation des arguments d’appel permettant de traiter les trois cas.

On définit donc

$$\left| \begin{array}{ll} \text{face } (x) & \psi_l^{(x)}(y, z, t) \\ \text{face } (y) & \psi_l^{(y)}(z, x, t) \\ \text{face } (z) & \psi_l^{(z)}(x, y, t) \end{array} \right.$$

Ce choix se paye par une contorsion intellectuelle pour admettre que le  $x$  vient après le  $z$  pour les fonctions de type  $(y)$ !

La discrétisation des fonctions auxiliaires de face est effectuée sur la grille du plan auquel elle est rattachée.

$$\text{Exemples: } \left| \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^n = \left( \psi_l^{(x)} \right) (y_j, z_k, t_n). \right.$$

Le deuxième type de fonction de face est constitué des traces du champ électrique sur la face considérée. Celles-ci sont situées sur un plan décalé d'un demi-pas (à l'extérieur ou à l'intérieur) par rapport à la face considérée. On a donc deux faces, face interne et externe, et on obtient deux plans distincts. On désigne par  $\otimes_b^+$ , ( $b = x, y, z$ ) le plan externe et par  $\otimes_b^-$  le plan interne. En adoptant les mêmes conventions que pour les fonctions auxiliaires de face, on définira ainsi, par exemple pour une face  $(y)$

$$u^{(y)}(z, x, t)_{\otimes_y^+}, \quad u^{(y)}(z, x, t)_{\otimes_y^-},$$

fonctions dont on considèrera les valeurs échantillonnées

$$\left( u^{(y)} \right)_{k,i,\otimes_y^+}^n, \quad \left( u^{(y)} \right)_{k,i,\otimes_y^-}^n.$$

Ces fonctions sont bien sûr en rapport avec le champ défini sur le cube. On a par exemple

$$\begin{aligned} \left( u^{(y)} \right)_{k,i,\otimes_y^+}^n &= u_{i,j^{ext},k}^n, \\ \left( u^{(z)} \right)_{i,j,\otimes_z^+}^n &= u_{i,j,k^{ext}}^n, \end{aligned}$$

où  $j^{ext}$  et  $k^{ext}$  désignent les coordonnées des nœuds externes au cube de calcul.

### 3.7 Notation pour les arêtes

Dans le cas de deux plans non parallèles, on est amené à définir sur l'arête commune à ces deux plans des fonctions d'arête. Chaque fonction d'arête est

associée à une composante d'une fonction de face : les fonctions d'arête vérifient des équations des ondes 1D le long de l'arête, leur terme source étant fonction de cette composante. Il y a  $L$  fonctions d'arête pour chaque fonction de face. Comme il y a deux faces on est amené à "accrocher" deux familles de fonctions d'arête par arête, chaque famille comprenant  $L \times L$  éléments (le premier  $L$  est dû au nombre des fonctions de face, le second au nombre de fonctions d'arête).

Les notations, pour une arête suivant  $z$ , sont les suivantes

$$\psi_{l,m}^{(x,z)} \rightarrow \left( \psi_l^{(x)} \right), \quad \psi_{l,m}^{(y,z)} \rightarrow \left( \psi_l^{(y)} \right),$$

Ainsi, le premier indice inférieur,  $l$ , renvoie au numéro de la fonction auxiliaire de face associée, le premier terme entre parenthèses et en indice supérieur, à la normale de cette même face. Enfin le second indice entre parenthèse rappelle la variable courante de l'arête.

La discrétisation des fonctions auxiliaires d'arête se fait sur la grille 1D intersection des deux grilles 2D des plans auxquelles elles se rattachent.

$$\text{Exemples : } \left| \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^n = \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right) (z_k, t_n). \right.$$

Les notations relatives aux arêtes en  $y$  et  $z$  s'obtiennent bien sûr par rotations d'indices.

### 3.8 Notations pour les coins

A l'intersection de trois arêtes concourantes, on est amené à définir  $L$  fonctions de coin pour chaque fonction d'arête. Comme il y a deux familles de fonctions d'arête par arête, on arrive à six familles au coin d'intersections, chaque famille contenant  $L^2$  éléments. Au total, on a donc  $6 L^3$  fonctions de coin. En adoptant les notations consistant à réécrire la fonction d'arête associée et à ajouter le troisième indice, on est amené à définir

$$\begin{aligned} l, m, p = 1, \dots, L \\ \left( \psi_{l,m,p}^{(z,x)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(x,y)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(y,z)} \right)^{n+1}, \\ \left( \psi_{l,m,p}^{(y,x)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(z,y)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(x,z)} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

## 4 Description des équations et discrétisation

### 4.1 Équations pour les faces absorbantes

#### 4.1.1 Les équations dans le domaine du continu

On se place sur la face  $x^-$  ( $\varepsilon_x = -1$ ) ou  $x^+$  ( $\varepsilon_x = +1$ ), on définit l'opérateur  $A(z)$  par,

$$A(z) = \text{div} \left( c(z) \cdot \vec{\nabla}_T \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( c(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) + c(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (17)$$

Les équations de faces dans le domaine du continu sont,

$$\varepsilon_x \frac{\partial u^{(x)}}{\partial x} + \frac{\gamma}{c(z)} \frac{\partial u^{(x)}}{\partial t} - \frac{1}{c(z)} \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\partial \psi_m^{(x)}}{\partial t} = 0 \quad \text{en } x = x^\pm, \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall l = 1, \dots, L, \\ \frac{1}{c(z)} \frac{\partial^2 \psi_l^{(x)}}{\partial t^2} + \alpha_l \left( (c\sigma)(z) \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial t} - A(z) \cdot \psi_l^{(x)} \right) = \frac{1}{c(z)} \frac{\partial^2 u^{(x)}}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (19)$$

Cette généralisation des équations de face au cas hétérogène est directement inspirée de la formulation proposée par Bamberger et Al. pour les équations paraxiales, [2].

#### 4.1.2 Les équations dans le domaine discret

Le schéma utilise trois plans en  $x$ , soient

$$\text{face } x^- : \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2}\Delta x, \quad x = \Delta x$$

$$\text{face } x^+ : \quad x = (n_x - 1)\Delta x, \quad x = (n_x - \frac{1}{2})\Delta x, \quad x = n_x\Delta x$$

Les fonctions auxiliaires de face sont évaluées sur le plan milieu, c'est à dire sur le plan où s'applique la CLA. Sur les plans décalés de  $\pm\Delta x/2$ , le schéma utilise deux plans consécutif du champ acoustique.

Dans la suite on indicera par  $\otimes_x^+$  la face externe (i.e. la face  $x = 0$  ou  $n_x\Delta x$ ) et  $\otimes_x^-$  la face interne. (i.e. la face  $x = \Delta x$  ou  $(n_x - 1)\Delta x$ ). La discrétisation proposée s'appuie sur le schéma composé de,



$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\left( (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} + (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^n - (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1} - (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^n \right)}{2\Delta x} + \\ & + \gamma \frac{\left( (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} + (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1} - (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^n - (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^n \right)}{2\tilde{c}_k\Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left( (\psi_m^{(x)})_{j,k}^{n+1} - (\psi_m^{(x)})_{j,k}^n \right)}{\tilde{c}_k\Delta t} = 0, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\left( (\psi_m^{(x)})_{j,k}^{n+1} - 2(\psi_m^{(x)})_{j,k}^n + (\psi_m^{(x)})_{j,k}^{n-1} \right)}{\tilde{c}_k\Delta t^2} + (\sigma c)_k \alpha_l \frac{\left( (\psi_m^{(x)})_{j,k}^{n+1} - (\psi_m^{(x)})_{j,k}^{n-1} \right)}{2\Delta t} \\ & - \alpha_l \frac{1}{\Delta z^2} \left( \tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} (\psi_m^{(x)})_{j,k+1}^n - (\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}) (\psi_m^{(x)})_{j,k}^n + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} (\psi_m^{(x)})_{j,k-1}^n \right) - \\ & - \alpha_l \frac{\tilde{c}_k}{\Delta y^2} \left( (\psi_m^{(x)})_{j+1,k}^n - 2(\psi_m^{(x)})_{j,k}^n + (\psi_m^{(x)})_{j-1,k}^n \right) = \\ & = \frac{\left( (\psi_0^{(x)})_{j,k}^{n+1} - 2(\psi_0^{(x)})_{j,k}^n + (\psi_0^{(x)})_{j,k}^{n-1} \right)}{\tilde{c}_k\Delta t^2} \\ & m = 1, \dots, L \quad \text{et avec} \quad (\psi_0^{(x)})_{j,k}^n = \frac{1}{2} \left( (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^n + (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^n \right). \end{aligned} \right. \quad (21)$$

#### 4.1.3 La récurrence explicite

Supposons les instants  $n-1$  et  $n$  connus, comme le champ  $u^{(x)}$  est évalué à l'instant  $n+1$  et sur le plan interne (noté  $\otimes_x^-$ ) à l'aide du schéma pour les nœuds internes au cube, (20) et (21) forment un système de  $(L+1)$  équations en les inconnues :

$$(u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1}, (\psi_1^{(z)})_{j,k}^{n+1}, \dots, (\psi_L^{(z)})_{j,k}^{n+1}.$$

Ce système s'inverse facilement : on commence par éliminer les fonctions auxiliaires explicitement selon

$$\left(\psi_l^{(x)}\right)_{j,k}^{n+1} = \frac{a_{l,k}}{2} (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} + (F_l)_{j,k} \quad (22)$$

où on a noté :

$$a_{l,k} = \frac{1}{1 + (\sigma c)_k \alpha_l \tilde{c}_k \Delta t / 2} \quad (23)$$

et où  $(F_l)_{j,k}$  se calculent explicitement à l'aide de quantités connues. Plus précisément, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_l)_{j,k}^{n+1} = A_{l,k}^1 \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j,k}^n + A_{l,k}^2 \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j,k}^{n-1} + \\ \quad + A_{l,k}^{31} \left( \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j,k}^n + \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j-1,k}^n \right) + \\ \quad + A_{l,k}^{32} \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j,k+1}^n + A_{l,k}^{33} \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j,k-1}^n + \\ \quad + A_{l,k}^4 \left( (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1} - 2 \left(2\psi_0^{(x)}\right)_{j,k}^n + \left(2\psi_0^{(x)}\right)_{j,k}^{n-1} \right), \end{array} \right. \quad (24)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{l,k}^1 = a_{l,k} \left( 2 - \alpha_l \left( \tilde{c}_k (\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}) \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} + 2\tilde{c}_k^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \right) \right) \\ A_{l,k}^2 = a_{l,k} \left( \alpha_l (\sigma c)_k \tilde{c}_k \frac{\Delta t}{2} - 1 \right) \\ A_{l,k}^{31} = a_{l,k} \alpha_l \frac{\tilde{c}_k^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} \quad A_{l,k}^{32} = a_{l,k} \alpha_l \frac{\tilde{c}_k \tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} \Delta t^2}{\Delta z^2} \\ A_{l,k}^{33} = a_{l,k} \alpha_l \frac{\tilde{c}_k \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} \Delta t^2}{\Delta z^2} \quad A_{l,k}^4 = \frac{a_{l,k}}{2}. \end{array} \right. \quad (25)$$

On injecte l'expression (22) dans (20) et on résout, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} = A_k^5 (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^n + A_k^6 \left(2\psi_0^{(x)}\right)_{j,k}^n + A_k^7 (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1} + \\ \quad + \sum_{m=1}^L A_{m,k}^8 \left( (F_m)_{j,k} - \left(\psi_m^{(x)}\right)_{j,k}^n \right), \end{array} \right. \quad (26)$$

avec

$$\left| \begin{array}{ll} A_k^5 = \frac{-2\tilde{c}_k \Delta t}{\tilde{c}_k \Delta t + \gamma_k^* \Delta x} & A_k^6 = \frac{\tilde{c}_k \Delta t + \gamma_k \Delta x}{\tilde{c}_k \Delta t + \gamma_k^* \Delta x} \\ A_k^7 = \frac{\tilde{c}_k \Delta t - \gamma_k \Delta x}{\tilde{c}_k \Delta t + \gamma_k^* \Delta x} & A_{l,k}^8 = \frac{2\beta_l}{\alpha_l} \frac{\Delta x}{\tilde{c}_k \Delta t + \gamma_k^* \Delta x}, \end{array} \right. \quad (27)$$

et

$$\gamma_k^* = 1 + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} (1 - a_{m,k}). \quad (28)$$

$(u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1}$  étant connu, il est alors facile de calculer les  $L+1$  quantités  $(\psi_l^{(x)})_{j,k}^{n+1}$  pour  $l = 0, \dots, L$  en utilisant (22) et (29) avec

$$2 (\psi_0^{(x)})_{j,k}^{n+1} = (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} + (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1}. \quad (29)$$

#### 4.1.4 Un algorithme de résolution

On suppose connues les faces

$$(u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^n, (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1},$$

ainsi que

$$(\psi_l^{(x)})_{j,k}^n, (\psi_l^{(x)})_{j,k}^{n-1} \quad l = 0, \dots, L.$$

A l'aide des coefficients donnés par (23), (25), (27) et (28), l'algorithme suivant permet de calculer

$$(u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1}, (\psi_l^{(x)})_{j,k}^{n+1} \quad l = 0, \dots, L.$$

– Faire pour les nœuds  $(j, k)$  de la face :

$$\left| \begin{array}{l} (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} = A_k^5 (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^n + A_k^6 (2\psi_0^{(x)})_{j,k}^n + A_k^7 (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1} \end{array} \right. \quad (30)$$

- Faire pour  $l = 1, \dots, L$   
Faire pour les nœuds  $(j, k)$  de la face :

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{aligned}
 F &= A_{l,k}^1 \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^n + A_{l,k}^2 \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^{n-1} + \\
 &+ A_{l,k}^{31} \left( \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j+1,k}^n + \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j-1,k}^n \right) + \\
 &+ A_{l,k}^{32} \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k+1}^n + A_{l,k}^{33} \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k-1}^n + \\
 &+ A_{l,k}^4 \left( (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1} - 2 \left( 2\psi_0^{(x)} \right)_{j,k}^n + \left( 2\psi_0^{(x)} \right)_{j,k}^{n-1} \right) \\
 \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^{n+1} &= F \\
 (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} &= (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} + A_{l,k}^8 \left( F - \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^n \right)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{31}$$

- Faire pour  $l = 1, \dots, L$   
Faire pour les nœuds  $(j, k)$  de la face :

$$\left| \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^{n+1} = \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^{n+1} + A_{l,k}^4 (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} \right. \tag{32}$$

- Faire pour les nœuds  $(j, k)$  de la face :

$$\left| \left( 2\psi_0^{(x)} \right)_{j,k}^{n+1} = (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} + (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1} \right. \tag{33}$$

Cet algorithme nécessite l'utilisation de  $2(L+1)$  faces en mémoire pour les fonctions auxiliaires

$$\left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^{n+1} \equiv \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^{n-1} \quad \text{et} \quad \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j,k}^n \quad l = 0, \dots, L,$$

et des deux plans contenant les champs électriques tangents de part et d'autre de la face

$$(u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^{n+1} \equiv (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^+}^n \quad \text{et} \quad (u^{(x)})_{j,k,\otimes_x^-}^{n+1}.$$

## 4.2 Équations pour les arêtes associées à deux faces absorbantes

### 4.2.1 Les équations dans le domaine du continu

On traite le cas d'une arête dont la variable tangente est  $z$ . Ces arêtes sont au nombre de quatre,

$$x^+y^+ : x = (nx - 1) \cdot \Delta x \cap y = (ny - 1) \cdot \Delta y$$

$$x^-y^+ : x = \Delta x \cap y = (ny - 1) \cdot \Delta y$$

$$x^+y^- : x = (nx - 1) \cdot \Delta x \cap y = \Delta y$$

$$x^-y^- : x = \Delta x \cap y = \Delta y$$

A chaque arête, on associe les nombres (penser au signe de la normale à la face)

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} 1 & \text{pour } x^+y^+, x^+y^- \\ -1 & \text{pour } x^-y^+, x^-y^- \end{bmatrix} \quad \varepsilon_y = \begin{bmatrix} 1 & \text{pour } x^+y^+, x^-y^+ \\ -1 & \text{pour } x^+y^-, x^-y^- \end{bmatrix}.$$

On suppose que sur chacun des deux plans portant l'arête sont appliquées des conditions aux limites absorbantes. On doit alors imposer le long de l'arête des conditions aux limites dites conditions d'arête. L'ensemble de ces conditions est formée de  $2(L \times L) + L$  équations aux dérivées partielles.

On a d'une part les  $2(L \times L)$  équations des ondes 1D définissant les fonctions auxiliaires d'arête : (pour  $l, m = 1, \dots, L$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{c(z)} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left( (\sigma c)(z) \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( c(z) \cdot \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z} \right) \right) = \\ \frac{1}{c(z)} \frac{\partial^2 \psi_l^{(x)}}{\partial t^2} \Big|_{y=y^\pm} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{1}{c(z)} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left( (\sigma c)(z) \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( c(z) \cdot \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z} \right) \right) = \frac{1}{c(z)} \frac{\partial^2 \psi_l^{(y)}}{\partial t^2} \Big|_{x=x^\pm} \quad (35)$$

et d'autre part, les 2  $L$  équations reliant les fonctions d'arête à certaines dérivées de la trace sur l'arête des fonctions de face : (pour  $l = 1, \dots, L$ )

$$\varepsilon_y \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial y} \Big|_{y=y^\pm} = -\frac{\gamma}{c(z)} \frac{\partial \psi_l^{(x)}}{\partial t} \Big|_{y=y^\pm} + \sum_{m=1}^L \frac{C_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} + \sum_{m=1}^L \frac{D_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t} \quad (36)$$

$$\varepsilon_x \frac{\partial \psi_l^{(y)}}{\partial x} \Big|_{x=x^\pm} = -\frac{\gamma}{c(z)} \frac{\partial \psi_l^{(y)}}{\partial t} \Big|_{x=x^\pm} + \sum_{m=1}^L \frac{C_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} + \sum_{m=1}^L \frac{D_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t} \quad (37)$$

où on a noté

$$C_{l,m} = \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \quad D_{l,m} = \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \quad \gamma_{l,m} = \frac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \quad (38)$$

Remarque : Afin de ne pas alourdir les notations, on a noté indifféremment les fonctions d'arête sans préciser l'arête à laquelle elles sont associées

#### 4.2.2 Les équations dans le domaine discret

Le maillage pour les fonctions de face est représenté sur la figure 4.2.2.

Le schéma va faire intervenir trois ordonnées consécutives suivant  $x$  et  $y$ . L'une correspond à des nœuds externes à la face, l'autre à des nœuds internes et enfin une à la position de la ligne frontière (i.e. de l'arête considérée). On choisit une numérotation de ces indices indépendante de la position droite ou gauche de la frontière considérée. On définit

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = -1 : \quad \otimes_x^+ &= 1 \quad \otimes_x^- = 2 \\ \varepsilon_x = +1 : \quad \otimes_x^+ &= n_x \quad \otimes_x^- = n_x - 1 \end{aligned} \quad (39)$$

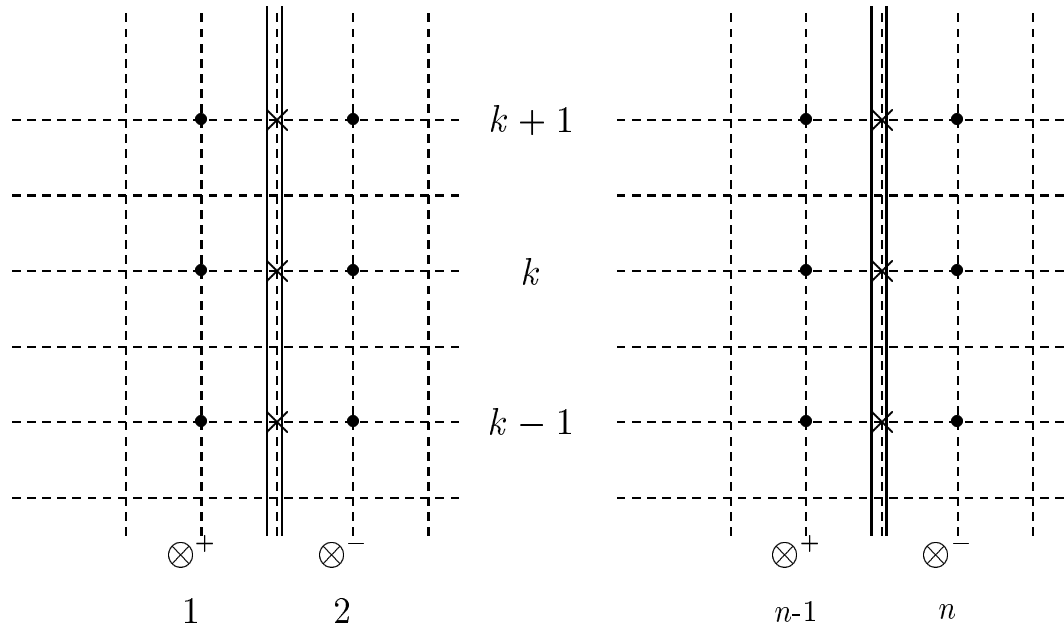


FIG. 2 – Représentation du maillage sur l'une des faces contenant l'arête.  $n$  désigne  $n_x$  pour la face  $y = y^\pm$  et  $n_y$  pour la face  $x = x^\pm$ .

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y = -1 : \quad \otimes_y^+ &= 1 \quad \otimes_y^- = 2 \\
\varepsilon_y = +1 : \quad \otimes_y^+ &= n_y \quad \otimes_y^- = n_y - 1
\end{aligned} \tag{40}$$

Les équations (34) et (35) sont approchées par

$$\left\{ \begin{aligned} & \forall l, m = 1, \dots, L \quad a = x \text{ ou } y \\ & \frac{\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n+1} - 2\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^n + \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n-1}}{\tilde{c}_k \Delta t^2} + (\sigma c)_{k,l,m} \frac{\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n-1}}{2\Delta t} - \\ & - \gamma_{l,m} \frac{\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k+1}^n - (\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}) \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^n + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-1}^n}{\Delta z^2} = \\ & = \frac{\left(\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^{n+1} - 2\left(\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^n + \left(\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^{n-1}}{\tilde{c}_k \Delta t^2}, \end{aligned} \right. \tag{41}$$

avec

$$\left(\psi_{l,0}^{(x,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2} \left( \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^+,k}^n + \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^-,k}^n \right), \tag{42}$$

$$\left(\psi_{l,0}^{(y,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2} \left( \left(\psi_l^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^+}^n + \left(\psi_l^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^-}^n \right). \tag{43}$$

Les équations (36) sont approchées par

$$\left\{ \begin{aligned} & \forall l = 1, \dots, L \\ & \frac{\left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} + \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^n - \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1} - \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^n}{2\Delta y} + \\ & + \gamma \frac{\left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} + \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1} - \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^n - \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^n}{2\tilde{c}_k \Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{\left(\psi_{l,m}^{(x)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(x)}\right)_k^n}{\tilde{c}_k \Delta t} - \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\left(\psi_{m,l}^{(y)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(y)}\right)_k^n}{\tilde{c}_k \Delta t} = 0 \end{aligned} \right. \tag{44}$$



Pour les équations (37), le système est obtenu en substituant  $x$  à  $y$  et réciproquement dans les équations (44)

#### 4.2.3 La récurrence explicite

Supposons les instants  $n$  et  $n - 1$  connus, comme les nœuds internes aux faces sont évalués à l'aide des équations de face, l'ensemble des équations composant le schéma forme un système de  $2L \times L + 2L$  équations en les inconnues

$$\begin{aligned} & \left( \psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1}, \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1}, \\ & \text{pour } l, m = 1, \dots, L \text{ et} \\ & \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j=\otimes_y^+, k}^{n+1}, \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,i=\otimes_x^+}^{n+1}, \\ & \text{pour } l = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Ce système s'inverse de la manière suivante, on commence par éliminer les inconnues d'arête

$$\begin{cases} \left( \psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} = \frac{a_{l,m,k}}{2} \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j=\otimes_y^+, k}^{n+1} + \left( P_{l,m}^{(x,z)} \right)_k, \\ \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1} = \frac{a_{l,m,k}}{2} \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,i=\otimes_x^+}^{n+1} + \left( P_{l,m}^{(y,z)} \right)_k, \end{cases} \quad (45)$$

où on a noté

$$a_{l,m,k} = \frac{1}{1 + (\sigma c)_k \gamma_{l,m} c_k \Delta t / 2}, \quad (46)$$

et où  $\left( P_{l,m}^{(x,z)} \right)_k$  et  $\left( P_{l,m}^{(y,z)} \right)_k$  se calculent en fonction de quantités connues. On a

$$\left\{ \begin{aligned} & \forall l, m = 1, \dots, L, \quad a = x \text{ ou } y \\ & \left( P_{l,m}^{(a,z)} \right)_k = B_{l,m,k}^1 \left( \psi_{l,m}^{(a,z)} \right)_k^n + B_{l,m,k}^2 \left( \psi_{l,m}^{(a,z)} \right)_k^{n-1} + \\ & \quad + B_{l,m,k}^{31} \left( \psi_{l,m}^{(a,z)} \right)_{k+1}^n + B_{l,m,k}^{32} \left( \psi_{l,m}^{(a,z)} \right)_{k-1}^n + \\ & \quad + B_{l,m,k}^4 \left( \left[ \begin{array}{c} \left( \psi_l^{(x)} \right)_{j=\otimes_y^-, k}^{n+1} \\ \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,i=\otimes_x^-}^{n+1} \end{array} \right] - 2 \left( 2\psi_{l,0}^{(a,z)} \right)_k^n + \left( 2\psi_{l,0}^{(a,z)} \right)_k^{n-1} \right) \end{aligned} \right. \quad (47)$$

avec

$$B_{l,m,k}^1 = a_{l,m,k} \left( 2 - \gamma_{l,m} \tilde{c}_k (\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} \right), \quad (48)$$

$$\begin{aligned} B_{l,m,k}^2 &= a_{l,m,k} (\gamma_{l,m} (\sigma c)_k \tilde{c}_k \frac{\Delta t}{2} - 1), \\ B_{l,m,k}^{31} &= a_{l,m,k} \gamma_{l,m} \tilde{c}_k \tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}, \\ B_{l,m,k}^{32} &= a_{l,m,k} \gamma_{l,m} \tilde{c}_k \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}, \\ B_{l,m,k}^4 &= \frac{a_{l,m,k}}{2}. \end{aligned} \quad (49)$$

On est donc ramené à la détermination des inconnues de face. Ces inconnues sont données par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } l = 1, \dots, L \\ \left( 1 + \frac{\Delta y}{\Delta t} B_{l,k}^6 \right) \cdot (\psi_l^{(x)})_{j=\otimes_y^+, k}^{n+1} - \frac{\Delta y}{\Delta t} \sum_{m=1}^L B_{l,m,k}^7 \cdot (\psi_m^{(y)})_{k,i=\otimes_x^+}^{n+1} = F_l^{(x)} \\ -\frac{\Delta x}{\Delta t} \sum_{m=1}^L B_{l,m,k}^7 \cdot (\psi_m^{(x)})_{j=\otimes_y^+, k}^{n+1} + \left( 1 + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_{l,k}^6 \right) \cdot (\psi_l^{(y)})_{k,i=\otimes_x^+}^{n+1} = F_l^{(y)}, \end{array} \right. \quad (50)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{l,m,k}^7 = \frac{a_{l,m,k}}{\tilde{c}_k} D_{l,m} \\ B_{l,k}^6 = \frac{\gamma - \sum_{m=1}^L C_{l,m} a_{l,m,k}}{\tilde{c}_k} \end{array} \right. \quad (51)$$

et où  $F_l^{(x)}$ ,  $F_l^{(y)}$  sont explicitement donnés à l'aide de quantités connues. Plus explicitement, on a

$$\left\{ \begin{aligned} F_l^{(x)} &= \left(1 + \gamma \frac{\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t}\right) \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+, k}^n + \\ &+ \left(1 - \gamma \frac{\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t}\right) \left(\left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^-, k}^{n+1} - \left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+, k}^n\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{2\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t} \left(\left(P_{l,m}^{(x,z)}\right)_k - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^n\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{2\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t} \left(\left(P_{m,l}^{(y,z)}\right)_k - \left(\psi_{m,l}^{(y,z)}\right)_k^n\right) \end{aligned} \right.$$

ainsi que des formules analogues pour  $F_l^{(y)}$ . Ainsi, les inconnues de face sont déterminées en inversant un système linéaire de taille  $2L$

#### 4.2.4 Un algorithme de résolution

On rappelle que l'on a défini pour tout  $l$

$$\left(\psi_{l,0}^{(x,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2} \left( \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^+, k}^n + \left(\psi_l^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^-, k}^n \right) \quad (52)$$

$$\left(\psi_{l,0}^{(y,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2} \left( \left(\psi_l^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^+}^n + \left(\psi_l^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^-}^n \right). \quad (53)$$

Remarque  $\left(\psi_{0,l}^{(a,z)}\right)_k^n$ ,  $a = x, y$  n'étant pas définies, elles sont de bons candidats pour contenir les seconds membres  $F_l^{(\cdot)}$ .

On suppose connues

- Les inconnues liées aux fonctions de face

$$\left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_x^-, k}^{n_t}, \quad \left(\psi_l^{(y)}\right)_{k, \otimes_y^-}^{n_t}, \quad n_t = n + 1, n$$

ainsi que

$$\left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+, k}^n, \quad \left(\psi_l^{(y)}\right)_{k, \otimes_x^+}^n.$$

- Les inconnues liées aux fonctions d'arête

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n_t}, \quad a = x, y, \quad l = 1, \dots, L, \quad m = 0, \dots, L, \quad n_t = n - 1, n.$$

L'algorithme ci-dessous permet de calculer les quantités,

- liées aux fonctions de face

$$\left(\psi_l^{(x)}\right)_{\otimes_y^+, k}^{n+1}, \quad \left(\psi_l^{(y)}\right)_{k, \otimes_x^+}^{n+1}.$$

- liées aux fonctions d'arête

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n+1}, \quad a = x, y, \quad l = 1, \dots, L, \quad m = 0, \dots, L,$$

Cet algorithme permet de substituer le nouvel instant calculé, soit  $n+1$ , à l'instant  $n - 1$ . Outre les coefficients précédemment définis, il utilise les quantités, (cf. (48), (49) via (46) et (38) )

$$\begin{aligned} B_k^{8y} &= \left(1 + \gamma \frac{\Delta x}{\tilde{c}_k \Delta t}\right), & B_k^{8x} &= \left(1 + \gamma \frac{\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t}\right), \\ B_k^{9y} &= \left(1 - \gamma \frac{\Delta x}{\tilde{c}_k \Delta t}\right), & B_k^{9x} &= \left(1 - \gamma \frac{\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t}\right), \\ B_{l,m,k}^{10x} &= \frac{2C_{l,m}\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t}, & B_{l,m,k}^{10y} &= \frac{2C_{l,m}\Delta x}{\tilde{c}_k \Delta t}, \\ B_{l,m,k}^{11x} &= \frac{2D_{l,m}\Delta y}{\tilde{c}_k \Delta t}, & B_{l,m,k}^{11y} &= \frac{2D_{l,m}\Delta x}{\tilde{c}_k \Delta t}, \end{aligned} \tag{54}$$

ainsi que, cf. (51),

$$\begin{bmatrix} B_{l,m,k}^{16} & B_{l,m,k}^{17} \\ B_{l,m,k}^{18} & B_{l,m,k}^{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\Delta y}{\Delta t} B_{l,k}^6\right) \delta_{l,m} I & , & -\left(\frac{\Delta y}{\Delta t} B_{\cdot,\cdot,k}^7\right)_{l,m} \\ -\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} B_{\cdot,\cdot,k}^7\right)_{l,m} & , & \left(1 + \frac{\Delta y}{\Delta t} B_{l,k}^6\right) I \end{bmatrix}^{-1}. \tag{55}$$

- On commence le calcul de  $(F_l^{(\cdot)})$  :  
Faire pour  $l = 1, \dots, L$

Faire pour tous les nœuds  $k$

$$\left| \begin{aligned} (F_l^{(y)})_k &= B_k^{8y} (\psi_l^{(y)})_{k, \otimes_x^-}^n + B_k^{9y} \left( (\psi_l^{(y)})_{k, \otimes_x^-}^{n+1} - (\psi_l^{(y)})_{k, \otimes_x^+}^n \right) \\ (F_l^{(x)})_k &= B_k^{8x} (\psi_l^{(x)})_{\otimes_y^-, k}^n + B_k^{9x} \left( (\psi_l^{(x)})_{\otimes_y^-, k}^{n+1} - (\psi_l^{(x)})_{\otimes_y^+, k}^n \right) \end{aligned} \right. \quad (56)$$

– On continue le calcul de  $(F_l^{(\cdot)})$  et on commence celui des  $(\psi_{l,m}^{(\cdot,z)})$ :

Faire pour  $l = 1, \dots, L$

Faire pour  $m = 1, \dots, L$

Faire pour tous les nœuds  $k$

Face  $x$ :

$$\left| \begin{aligned} P &= B_{l,m,k}^1 (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^n + B_{l,m,k}^2 (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n-1} + \\ &\quad + B_{l,m,k}^{31} (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{k+1}^n + B_{l,m,k}^{32} (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{k-1}^n + \\ &\quad + B_{l,m,k}^4 \left( -2 (2\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^n + (2\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^{n-1} + (\psi_{l,z}^{(x)})_{\otimes_y^-, k}^{n+1} \right) \\ G &= P - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n-1} \\ (\eta_{l,m}^{(x,z)})_k^{n+1} &= P \\ (F_l^{(x)})_k &= (F_l^{(x)})_k + B_{l,m,k}^{10x} G \\ (F_m^{(y)})_k &= (F_m^{(y)})_k + B_{m,l,k}^{11y} G \end{aligned} \right. \quad (57)$$

Face  $y$  :

$$\begin{aligned}
 P &= B_{l,m,k}^1 \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^n + B_{l,m,k}^2 \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n-1} + \\
 &\quad + B_{l,m,k}^{31} \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+1}^n + B_{l,m,k}^{32} \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k-1}^n + \\
 &\quad + B_{l,m,k}^4 \left( -2 \left( 2\psi_{l,0}^{(y,z)} \right)_k^n + \left( 2\psi_{l,0}^{(y,z)} \right)_k^{n-1} + \left( \psi_{l,z}^{(y)} \right)_{k,\otimes_x^-}^{n+1} \right) \\
 G &= P - \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n-1} \\
 \left( \eta_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1} &= P \\
 \left( F_l^{(y)} \right)_k &= \left( F_l^{(y)} \right)_k + B_{l,m,k}^{10y} G \\
 \left( F_m^{(x)} \right)_k &= \left( F_m^{(x)} \right)_k + B_{m,l,k}^{11x} G
 \end{aligned} \tag{58}$$

– Résolution du système en  $\psi_{l,m}^{(.,z)}$  :

faire pour  $l=1,L$

faire pour tous les nœuds  $k$

$$\begin{cases} \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1} = 0 \\ \left( \psi_l^{(x)} \right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} = 0 \end{cases} \tag{59}$$

faire pour  $l=1,L$

faire pour  $m=1,L$

faire pour tous les nœuds  $k$

$$\begin{cases} \left( \psi_l^{(x)} \right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} = \left( \psi_l^{(x)} \right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} + B_{k,l,m}^{16} \left( F_m^{(x)} \right)_k + B_{k,l,m}^{17} \left( F_m^{(y)} \right)_k \\ \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1} = \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1} + B_{k,l,m}^{18} \left( F_m^{(x)} \right)_k + B_{k,l,m}^{19} \left( F_m^{(y)} \right)_k \end{cases} \tag{60}$$

- On finit le calcul des fonctions d'arête de type  $\psi_{l,m}^{(\cdot,z)}$  :  
 faire pour  $l=1,L$   
 faire pour  $m=1,L$   
 faire pour tous les nœuds  $k$

$$\left| \begin{array}{l} \left( \psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} = \left( \psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} + B_{l,m,k}^4 \left( \psi_{l,z}^{(x)} \right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} \\ \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1} = \left( \psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1} + B_{l,m,k}^4 \left( \psi_{l,z}^{(y)} \right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1} \end{array} \right. \quad (61)$$

- puis, le calcul de deux fois la trace de la fonction de face :  
 faire pour  $l=1,L$   
 faire pour tous les nœuds  $k$

$$\left| \begin{array}{l} \left( 2\psi_{l,0}^{(y,z)} \right)_k^{n+1} = \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1} + \left( \psi_l^{(y)} \right)_{k,\otimes_x^-}^{n+1} \\ \left( 2\psi_{l,0}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} = \left( \psi_l^{(x)} \right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} + \left( \psi_l^{(x)} \right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1} \end{array} \right. \quad (62)$$

### 4.3 Traitement du champ acoustique le long des arêtes

Le choix d'une approximation du Laplacien tridimensionnel à sept points entraîne la propriété agréable que le schéma intérieur n'a aucun besoin de la connaissance du champ  $u$  sur les nœuds situés sur une arête du cube de calcul. Il n'en serait pas de même si l'on utilisait une version plus isotrope du laplacien (Arakawa par exemple). C'est pourquoi on donne ici un moyen de calculer les valeurs du champ sur une arête absorbante.

En fait, le calcul des fonctions de face aux nœuds situés le long des arêtes à l'aide des équations discrètes écrites précédemment amène à une situation paradoxale concernant le calcul du champ acoustique le long de l'arête: on dispose de deux équations pour l'évaluer. En effet et par exemple pour une arête en  $z$ , on peut tout d'abord considérer que cette arête appartient à la face  $(x)$  et donc que  $u_{i=\otimes_x^+,j=\otimes_y^+,k}^{n+1}$  se calcule par la CLA relative à cette face auquel cas

$$u_{i=\otimes_x^+,j=\otimes_y^+,k}^n = (u^{(x)})_{j=\otimes_y^+,k,\otimes_x^+}^n \quad (63)$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^{n+1} - (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^n \right)}{2\Delta x} + \\ & + \gamma \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^{n+1} - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^n \right)}{2\Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left( (\psi_m^{(x)})_{\otimes_y^+, k}^{n+1} - (\psi_m^{(x)})_{\otimes_y^+, k}^n \right)}{\tilde{c}_k \Delta t} = 0. \end{aligned} \right. \quad (64)$$

On peut également voir l'arête comme un sous-ensemble du plan en  $(y)$  et considérer que c'est la CLA sur ce plan qui s'applique :

$$(u)_{i=\otimes_x^+, j=\otimes_y^+, k}^n = (u^{(x)})_{j=\otimes_y^+, k, \otimes_x^+}^n \quad (65)$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^{n+1} - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^n \right)}{2\Delta y} + \\ & + \gamma \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^{n+1} - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^n \right)}{2\Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left( (\psi_m^{(y)})_{k, \otimes_x^+}^{n+1} - (\psi_m^{(y)})_{k, \otimes_x^+}^n \right)}{\tilde{c}_k \Delta t} = 0. \end{aligned} \right. \quad (66)$$

Je conjecture que modulo les équations discrètes satisfaites par les fonctions auxiliaires, ces deux équations ne sont en fait pas indépendantes et que l'une entraîne l'autre. Ceci demanderait à être vérifié par des calculs analytiques. On peut également adopter un profil bas consistant à ne pas favoriser une face plutôt que l'autre et de retenir le schéma obtenu en sommant les deux équations relatives à chacune des faces. On obtient :



$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^{n+1} - (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^n \right)}{2\Delta x} + \\ & + \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^{n+1} - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^n \right)}{2\Delta y} + \\ & + \gamma \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^n \right)}{2\tilde{c}_k \Delta t} + \\ & + \gamma \frac{\left( (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} + (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^{n+1} - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n - (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^n \right)}{2\tilde{c}_k \Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left( (\psi_m^{(y)})_{k, \otimes_x^+}^{n+1} - (\psi_m^{(y)})_{k, \otimes_x^+}^n + (\psi_m^{(x)})_{\otimes_y^+, k}^{n+1} - (\psi_m^{(x)})_{\otimes_y^+, k}^n \right)}{\tilde{c}_k \Delta t} = 0. \end{aligned} \right. \quad (67)$$

$(u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1}$  peut alors se calculer via:

$$\left\{ \begin{aligned} & (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^{n+1} = D_k^1 \cdot (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^n + D_k^2 \cdot (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^n + \\ & + D_k^3 \cdot (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^-, k}^n + D_k^4 \cdot (u)_{\otimes_x^-, \otimes_y^+, k}^n + D_k^5 \cdot (u)_{\otimes_x^+, \otimes_y^+, k}^n + \\ & + \sum_{m=1}^L D_m^6 \left( (\psi_m^{(y)})_{k, \otimes_x^+}^{n+1} - (\psi_m^{(y)})_{k, \otimes_x^+}^n + (\psi_m^{(x)})_{\otimes_y^+, k}^{n+1} - (\psi_m^{(x)})_{\otimes_y^+, k}^n \right) \end{aligned} \right. \quad (68)$$

avec

$$\begin{aligned}
 D_k^1 &= \frac{\frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}}, & D_k^2 &= \frac{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} \\
 D_k^3 &= \frac{\frac{1}{2\Delta y} - \frac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}}, & D_k^4 &= \frac{\frac{1}{2\Delta x} - \frac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} \\
 D_k^5 &= \frac{\frac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t} - \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta y}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}}, & D_{m,k}^6 &= \frac{\frac{1}{\tilde{c}_k\Delta t} \cdot \frac{\alpha_m}{\beta_m}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}}
 \end{aligned} \tag{69}$$

## 4.4 Équations pour les coins associés à trois faces absorbantes

### 4.4.1 Les équations dans le domaine du continu

On note  $c$  la vitesse et  $\sigma$  l'amortissement au coin considéré. On définit,

$$\gamma_{l,m} = \frac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m}, \quad \gamma_{l,m,p} = \frac{\gamma_{l,m} \alpha_p}{\gamma_{l,m} + \alpha_p - \gamma_{l,m} \alpha_p}. \quad (70)$$

L'ensemble des conditions de coin est construit à partir du système

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_z \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(z^\pm, t) &= -\frac{\gamma}{c} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(z^\pm, t) + \sum_{p=1}^L \frac{1}{c} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{d\psi_{l,m,p}^{(x,z)}}{dt}(t) + \\ &+ \sum_{p=1}^L \frac{1}{c} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{d\psi_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt}(t) + \sum_{p=1}^L \frac{1}{c} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{d\psi_{l,p,m}^{(x,y)}}{dt}(t). \end{aligned} \right. \quad (71)$$

Les fonctions de coin, triplement indicées, étant données par

$$\frac{1}{c} \frac{d\psi_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,p}(\sigma c) \psi_{l,m,p}^{(a,b)}(t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial t}(b = b^\pm, t). \quad (72)$$

Le système complet est obtenu en effectuant sur (71) et (72),

1. La permutation  $x \longrightarrow y$ ,  $y \longrightarrow x$ , l'indice  $z$  restant fixé.
2. Deux fois et successivement la rotation d'indice  $x \longrightarrow y$ ,  $y \longrightarrow z$  et  $z \longrightarrow x$ .

On obtient ainsi 6 systèmes de  $L^2$  équations. Après discrétisation, ce système permet d'évaluer les 6  $L^2$  inconnues manquantes dans le processus itératif en temps, à savoir,

$$\left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{b=0 \text{ ou } n_b}^{n+1}, \quad a, b = x, y, \text{ ou } z \quad \text{et } a \neq b, \quad l, m = 1, \dots, L.$$

#### 4.4.2 Les équations dans le domaine discret

On commence par définir des notations appropriées pour les indices relatifs aux fonctions d'arête. Ces notations permettent une écriture unique du schéma pour chacun des huit coins possibles.

Le schéma numérique fait intervenir les fonctions d'arête de type  $\psi_{l,m}^{(a,b)}$  en trois nœuds situés à une demi-maille de part et d'autre du coin. On note  $\otimes_b^+$  le nœud externe et  $\otimes_b^-$  le nœud interne. On a ainsi les correspondances,

$$\varepsilon_b = 1 : \quad \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^n \equiv \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{n_b-1}^n, \quad \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^n \equiv \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{n_b}^n, \quad (73)$$

$$\varepsilon_b = -1 : \quad \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^n \equiv \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_2^n, \quad \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^n \equiv \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_1^n, \quad (74)$$

La figure 4.4.2 représente la numérotation correspondante pour l'arête en  $x$ .

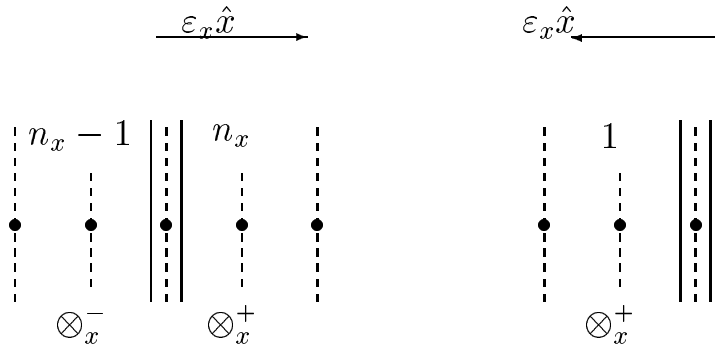


FIG. 3 – Numérotation pour le maillage sur l'arête en  $x$  contenant le coin. La numérotation du bas est adaptée au schéma pour le coin. La numérotation du haut correspond aux indices réels des fonctions d'arête. On distingue deux cas selon que le coin est au début ou à la fin de l'arête.

On commence par la discrétisation des équations différentielles ordinaires au coin. On centre ces équations sur l'instant  $t_{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$ , en écrivant

$$\begin{cases} \psi_{l,m,p}^{(a,b)}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx \frac{(\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} + (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^n}{2} \\ \frac{d\psi_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx \frac{(\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} - (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^n}{\Delta t}. \end{cases} \quad (75)$$

De même, on utilise les approximations

$$\frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial t}(b=0, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{(\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^+}^{n+1} + (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^-}^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^+}^n - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^-}^n}{2\Delta t}$$

Le schéma pour les fonctions de coin s'écrit alors,

$$\begin{cases} \frac{(\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} - (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^n}{c\Delta t} + (\sigma c)\gamma_{l,m,p} \frac{(\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} + (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^n}{2} = \\ = \frac{(\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^+}^{n+1} + (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^-}^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^+}^n - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{\otimes_b^-}^n}{2c\Delta t}. \end{cases} \quad (76)$$

Le système (71) se discrétise en utilisant des approximations similaires. On obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} + \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^n - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^n}{2\Delta z} = \\ & -\gamma \frac{\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} + \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^n - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^n}{2c\Delta t} + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{\left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n+1} - \left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^n}{c\Delta t} + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n+1} - \left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n}{c\Delta t} + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{\left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^{n+1} - \left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^n}{c\Delta t}. \end{aligned} \right. \quad (77)$$

En permutant et faisant circuler les indices comme indiqué dans le préambule, on obtient un schéma constitué de  $6L^3$  équations du type (76) ainsi que de 6 systèmes de  $L^2$  équations analogues à (77).

#### 4.4.3 La récurrence explicite

Le système précédemment décrit s'interprète comme un ensemble d'équations en les inconnues:

$$l, m = 1, \dots, L$$

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{l,m}^{(z,x)}\right)_{\otimes_x^+}^{n+1}, \quad \left(\psi_{l,m}^{(x,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}, \quad \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1}, \\ & \left(\psi_{l,m}^{(y,x)}\right)_{\otimes_x^+}^{n+1}, \quad \left(\psi_{l,m}^{(z,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}, \quad \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1}. \end{aligned}$$

(inconnues d'arête) ainsi que

$$l, m, p = 1, \dots, L$$

$$\begin{aligned} & \left( \psi_{l,m,p}^{(z,x)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(x,y)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(y,z)} \right)^{n+1}, \\ & \left( \psi_{l,m,p}^{(y,x)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(z,y)} \right)^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m,p}^{(x,z)} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

qui sont les inconnues de coin.

On commence par éliminer les inconnues de coin. On a

$$\left( \psi_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^{n+1} = \frac{1}{2} a_{l,m,p} \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^{n+1} + \left( P_{l,m,p}^{(a,b)} \right), \quad (78)$$

avec

$$\begin{aligned} \left( P_{l,m,p}^{(a,b)} \right) &= A_{l,m,p}^1 \left( \psi_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^n + \\ &+ a_{l,m,p} \frac{1}{2} \left( \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^{n+1} - \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^n - \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^n \right), \end{aligned} \quad (79)$$

et

$$A_{l,m,p}^1 = \frac{1 - \gamma_{l,m,p}(\sigma c) c \frac{\Delta t}{2}}{1 + \gamma_{l,m,p}(\sigma c) c \frac{\Delta t}{2}}, \quad a_{l,m,p} = \frac{1}{1 + \gamma_{l,m,p}(\sigma c) c \frac{\Delta t}{2}}. \quad (80)$$

Puis, on injecte ces expressions dans les équations de type arête, il vient

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} + \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^n - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^n}{2\Delta z} = \\ & -\gamma \frac{\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} + \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^n - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^n}{2c\Delta t} + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \cdot \frac{\frac{1}{2} a_{l,m,p} \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} + \left(P_{l,m,p}^{(x,z)}\right) - \left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^n}{c\Delta t} + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \cdot \frac{a_{p,l,m} \frac{1}{2} \left(\psi_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\odot_y^+}^{n+1} + \left(P_{p,l,m}^{(z,y)}\right) - \left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n}{c\Delta t} + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \cdot \frac{a_{l,p,m} \frac{1}{2} \left(\psi_{l,p}^{(x,y)}\right)_{\odot_y^+}^{n+1} + \left(P_{l,p,m}^{(x,y)}\right) - \left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^n}{c\Delta t}. \end{aligned} \right. \quad (81)$$

En séparant les inconnues des quantités connues et après multiplication de (81) par  $2c\Delta t$ , on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{c\Delta t}{\Delta z} \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} + \gamma \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} - \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} a_{l,m,p} \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} - \\ & - \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \cdot a_{p,l,m} \left(\psi_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\odot_y^+}^{n+1} - \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \cdot a_{l,p,m} \left(\psi_{l,p}^{(x,y)}\right)_{\odot_y^+}^{n+1} \\ & = \\ & \left( \frac{c\Delta t}{\Delta z} + \gamma \right) \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^n + \left( \frac{c\Delta t}{\Delta z} - \gamma \right) \left( \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^n \right) + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \cdot \left( 2 \left(P_{l,m,p}^{(x,z)}\right) - 2 \left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^n \right) + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \cdot \left( 2 \left(P_{p,l,m}^{(z,y)}\right) - 2 \left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n \right) + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \cdot \left( 2 \left(P_{l,p,m}^{(x,y)}\right) - 2 \left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^n \right) \end{aligned} \right.$$



En procédant de même pour les cinq autres systèmes, on obtient un système linéaire à 6  $L^2$  inconnues. Rassemblant les inconnues en

$${}^tV = \left( \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^{n+1}, l, m = 1, \dots, L, a, b = x, y, z, a \neq b \right).$$

Le système linéaire s'écrit:

$$\mathbf{M} \cdot V = U,$$

où  $U$  se calcule explicitement. La matrice  $\mathbf{M}$  a pour expression

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|cccccc} & \psi_{l,m}^{(z,x)} & \psi_{l,m}^{(x,y)} & \psi_{l,m}^{(y,z)} & \psi_{l,m}^{(y,x)} & \psi_{l,m}^{(z,y)} & \psi_{l,m}^{(x,z)} \\ \hline \psi_{l,m}^{(z,x)} & A_x & -B & 0 & 0 & -C & 0 \\ \hline \psi_{l,m}^{(x,y)} & 0 & A_y & -B & 0 & 0 & -C \\ \hline \psi_{l,m}^{(y,z)} & -B & 0 & A_z & -C & 0 & 0 \\ \hline \psi_{l,m}^{(y,x)} & 0 & 0 & -C & A_x & 0 & -B \\ \hline \psi_{l,m}^{(z,y)} & -C & 0 & 0 & -B & A_y & 0 \\ \hline \psi_{l,m}^{(x,z)} & 0 & -C & 0 & 0 & -B & A_z \end{array} \quad (82)$$

les matrices  $B, C, A_x, A_y, \dots$  étant carrées de taille  $L^2 \times L^2$  et données par

$$A_a = \frac{c\Delta t}{\Delta a} Id + A, \quad a = x, y \text{ ou } z, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} A_{l,m}^{p,q} &= \delta_l^p \delta_m^q \left( 1 + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p}{\alpha_p} \left( 1 - \frac{\gamma_{l,m,p} a_{l,m,p}}{\alpha_p} \right) \right), \\ B_{l,m}^{p,q} &= \delta_l^q \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l} a_{p,l,m}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}}, \\ C_{l,m}^{p,q} &= \delta_l^p \frac{\beta_q \gamma_{l,m,q} \gamma_{q,l} a_{l,q,m}}{\alpha_q^2 \gamma_{l,m}}. \end{aligned} \quad (84)$$

$A$  est diagonale et les matrices  $B, C$  sont creuses. Par exemple, pour  $L = 2$ ,  $A, B$  et  $C$  se présentent sous la forme : (les points noirs sont les éléments non nuls)

$$A = \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \bullet & & \bullet & \\ & \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet & \\ & \bullet & & \bullet \end{bmatrix}.$$

#### 4.4.4 Un algorithme de résolution

On suppose connues

$$\forall l, m, p = 1, \dots, L, \quad \forall a, b = x, y, z, \quad a \neq b.$$

- Les quantités liées aux fonctions d'arête

$$\begin{aligned} & \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_y}^-, \quad \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_y}^-, \quad \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_y}^+, \\ & \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_y}^{n+1}, \quad \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_y}^{n+1}. \end{aligned}$$

- Les quantités liées aux fonctions de coin

$$\left( \psi_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^n,$$

L'algorithme suivant permet le calcul

- Des quantités liés aux fonctions d'arête

$$\left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_y}^{n+1}.$$

- Des quantités liés aux fonctions de coin

$$\left( \psi_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^{n+1},$$

Il utilise deux vecteurs auxiliaires de taille  $6 L^2$  notés

$$U = \left( U_{\psi,l,m}^{(a,b)} \right) \quad \text{et} \quad V = \left( V_{\psi,l,m}^{(a,b)} \right)$$

On affecte progressivement au vecteur  $U$  la valeur du second membre du système linéaire. Le vecteur  $V$  a une double fonction. A la fin du processus il contient la solution du système linéaire. Il sert également à stocker des quantités intermédiaires dans le calcul des fonctions de coin. Plus précisément ce calcul est réalisé en procédant de la manière suivante

On calcule les expressions indépendantes de  $p$ :

$$V_{\psi,l,m}^{(a,b)} = \left( \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^n - \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^n - \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^{n+1} \right)$$

On calcule  $2P_{l,m,p}^{(a,b)}$ :

$$\left( \psi_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^{n+1} \equiv (2P) = A_{l,m,p}^1 (2 \left( \eta_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^n) + A_{l,m,p} V_{\psi,l,m}^{(a,b)} \quad (85)$$

Puis, après inversion du système linéaire:

$$V_{\psi,l,m}^{(a,b)} = \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^{n+1}$$

On complète le calcul des fonctions de coins:

$$\left( \psi_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \left( \psi_{l,m,p}^{(a,b)} \right)^{n+1} + A_{l,m,p} V_{\psi,l,m}^{(a,b)} \right)$$

On définit

$$\begin{aligned} r^{5b} &= \left( \gamma + \frac{c\Delta t}{\Delta b} \right) \\ r^{6b} &= \left( -\gamma + \frac{c\Delta t}{\Delta b} \right) \end{aligned} \quad (86)$$

et

$$\begin{aligned}
A_{l,m,p} &= \frac{1}{1 + \gamma_{l,m,p}(\sigma c)c\frac{\Delta t}{2}} & A_{l,m,p}^1 &= \frac{1 - \gamma_{l,m,p}(\sigma c)c\frac{\Delta t}{2}}{1 + \gamma_{l,m,p}(\sigma c)c\frac{\Delta t}{2}}, \\
A_{l,m,p}^2 &= \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} & A_{l,m,p}^3 &= \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \\
A_{l,m,p}^4 &= \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}}
\end{aligned} \tag{87}$$

L'algorithme s'écrit

- Faire pour  $l = 1, \dots, L$   
Faire pour  $m = 1, \dots, L$   
Pour  $a, b = x, y$  ou  $z$ ,  $a \neq b$

$$\begin{aligned}
V_{\psi,l,m}^{(a,b)} &= \left( \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^+}^n - \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^n - \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\otimes_b^-}^{n+1} \right) \\
U_{\psi,l,m}^{(a,b)} &= r^{5b} \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\circ_b^-}^n + r^{6b} \left( \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\circ_b^-}^{n+1} - \left( \psi_{l,m}^{(a,b)} \right)_{\circ_b^+}^n \right)
\end{aligned} \tag{88}$$

- Les instructions ci-dessous ajoutent les contributions des termes en  $\left( \psi_{l,m,p}^{(y,x)} \right)^n$ .  
Pour obtenir l'algorithme complet, on doit ajouter les six exemplaires obtenus en faisant circuler les indices. Cette circulation s'obtient de la manière suivante (très facile à réaliser avec un éditeur)

1 On fait la substitution

$$z \longrightarrow z \quad x \longrightarrow y \quad y \longrightarrow x$$

On obtient ainsi deux exemplaires, l'original plus le nouveau.

2 Sur chacun des deux exemplaires on fait deux fois et successivement

$$x \longrightarrow y \quad y \longrightarrow z \quad z \longrightarrow x$$

On obtient ainsi les six exemplaires.

Faire pour  $l = 1, \dots, L$   
 Faire pour  $m = 1, \dots, L$   
 Faire pour  $p = 1, \dots, L$   
 Termes en  $\left(\psi_{l,m,p}^{(y,x)}\right)^n$  :

$$\begin{aligned}
 (2PSI) &= 2 \left(\psi_{l,m,p}^{(y,x)}\right)^n \\
 (2P) &= A_{l,m,p}^1 (2PSI) + A_{l,m,p} V_{\psi,l,m}^{(y,x)} \\
 D1 &= (2P) - (2PSI) \\
 U_{\psi,l,m}^{(y,x)} &= U_{\psi,l,m}^{(y,x)} + A_{l,m,p}^2 D1 \\
 U_{\psi,m,p}^{(z,y)} &= U_{\psi,m,p}^{(z,y)} + A_{m,p,l}^3 D1 \\
 U_{\psi,l,p}^{(y,z)} &= U_{\psi,l,p}^{(y,z)} + A_{l,p,m}^4 D1
 \end{aligned} \tag{89}$$

– On inverse le système linéaire :

$$\left(V_{\psi,l,m}^{(a,b)}\right) = (M)^{-1} \cdot \left(U_{\psi,l,m}^{(a,b)}\right)$$

– On termine le calcul des fonctions de coin à l'instant  $n + 1$  :

Faire pour  $l = 1, \dots, L$   
 Faire pour  $m = 1, \dots, L$   
 Faire pour  $a, b = x, y$  ou  $z$ ,  $a \neq b$

$$\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \left(2\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} + A_{l,m,p} V_{\psi,l,m}^{(a,b)} \right)$$

– Et on récupère les fonctions d'arête aux extrémités et à l'instant  $n + 1$  :

Faire pour  $l = 1, \dots, L$   
 Faire pour  $m = 1, \dots, L$   
 Faire pour  $a, b = x, y$  ou  $z$ ,  $a \neq b$

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_b^+}^{n+1} = V_{\psi,l,m}^{(a,b)}$$

## 5 Illustration de la méthode

Nous terminons ce rapport par une première validation sur un exemple tiré de l'acoustique musicale: la modélisation du tambour. Notons que cet exemple n'est pas le plus pertinent du point de vue des conditions absorbantes. Il est présenté ici plutôt comme une illustration des potentialités de la méthode.

### 5.1 Description du modèle et discrétisation

Le problème auquel on s'intéresse est la modélisation du couplage entre une membrane, une cavité et l'air extérieur. Dans notre expérience, la cavité est une boîte cubique dont cinq côtés sont rigides tandis que son sommet est recouvert d'une membrane rectangulaire fixée sur ses quatre arêtes. Le système d'équations régissant le système vibro-acoustique a été décrit dans [10] ou encore [3]. Les inconnues du problème sont la pression, externe ( $p_e$ ) ou interne ( $p_i$ ), et le déplacement  $w$  de la membrane. Notons,

- $\Omega_{ext}$  : Domaine extérieur à la boîte
- $\Omega_{int}$  : Domaine intérieur à la boîte
- $C$  : Réunion des quatre côtés latéraux et de la base de la boîte
- $M$  : Face supérieure de la boîte (membrane)
- $\partial M$  : Réunion des quatre arêtes frontières de  $M$

Les équations du problème sont,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2} - \Delta_{3D} p_e = 0 & \text{dans } \Omega_{ext} \\ \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} - \Delta_{3D} p_i = 0 & \text{dans } \Omega_{int} \\ \frac{\partial p_e}{\partial n_e} = \frac{\partial p_i}{\partial n_i} = 0 & \text{sur } C \\ -\frac{\partial p_e}{\partial n_e} = \frac{\partial p_i}{\partial n_i} = \rho_a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} & \text{sur } M. \end{array} \right. \quad (90)$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta_{2D} w = g(t)\delta_s + \eta(p_e - p_i) & \text{sur } M, \\ w = 0 & \text{sur } \partial M, \end{cases} \quad (91)$$

Notre hypothèse sur la forme parallélipédique de la caisse, si elle n'est pas très réaliste (les caisses de tambours sont plutôt rondes en général), va nous permettre d'utiliser un schéma aux différences finies très simple pour la modélisation. On maille le domaine d'intérêt par une grille régulière de pas constant et on localise les frontières de l'objet entre deux plans du maillage. Il est alors aisé de modifier le classique schéma 2-2 pour tenir compte de l'obstacle en utilisant le principe des images.

Nous décrivons par les deux indices,  $c^-$  et  $c^+$  la caisse du tambour: sa base et son sommet ont pour équations

$$\begin{cases} z = (c^+ + \frac{1}{2})h, & z = (c^- - \frac{1}{2})h \\ (c^- - \frac{1}{2})h \leq x, y \leq (c^+ + \frac{1}{2})h, \end{cases} \quad (92)$$

les faces latérales s'obtenant par permutations des indices. La figure 4 représente la position du tambour dans le maillage

Le schéma permettant l'intégration en temps s'écrit en plusieurs étapes. On commence par faire comme si l'obstacle n'existait pas

$$\begin{cases} \text{faire pour } 2 \leq i, j, k \leq n_x - 1, n_y - 1, n_z - 1 \\ p_{i,j,k}^{n+1} = 2p_{i,j,k}^n - p_{i,j,k}^{n-1} + c_a^2 \Delta t^2 (\Delta_{3D}^h p)_{i,j,k} \\ (\Delta_{3D}^h p)_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} (6p_{i,j,k}^n - p_{i+1,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n - p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j-1,k}^n - p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k-1}^n) \end{cases} \quad (93)$$

Puis on corrige les valeurs obtenues aux noeuds situés de part et d'autre de l'obstacle: par exemple, pour un noeud interne, on enlève la contribution du

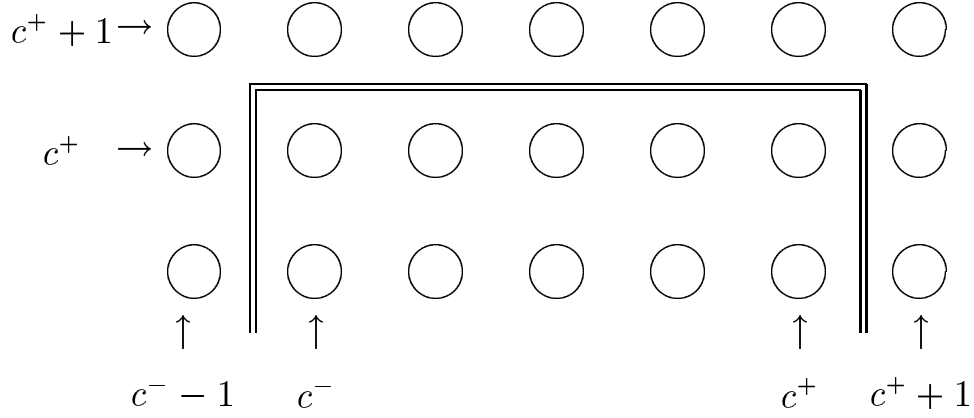


FIG. 4 – Représentation dne coupe du maillage et de l'obstacle

ou des noeuds situé dans le domaine externe en la remplaçant par les valeurs obtenues par symétrie par rapport au plan de l'obstacle.

– Corrections pour les faces haut et bas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{faire pour } c^- \leq i, j \leq c^+, \\ p_{i,j,c^-}^{n+1} = p_{i,j,c^-}^{n+1} - \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,j,c^- - 1}^n - p_{i,j,c^-}^n) \\ p_{i,j,c^- - 1}^{n+1} = p_{i,j,c^- - 1}^{n+1} + \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,j,c^- - 1}^n - p_{i,j,c^-}^n) \\ p_{i,j,c^+}^{n+1} = p_{i,j,c^+}^{n+1} - \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,j,c^+ + 1}^n - p_{i,j,c^+}^n) \\ p_{i,j,c^+ + 1}^{n+1} = p_{i,j,c^+ + 1}^{n+1} + \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,j,c^+ + 1}^n - p_{i,j,c^+}^n) \end{array} \right. \quad (94)$$



– Corrections pour les faces droite et gauche

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{faire pour } c^- \leq j, k \leq c^+, \\ p_{c^-,j,k}^{n+1} = p_{c^-,j,k}^{n+1} - \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{c^--1,j,k}^n - p_{c^-,j,k}^n) \\ p_{c^--1,j,k}^{n+1} = p_{c^--1,j,k}^{n+1} + \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{c^--1,j,k}^n - p_{c^-,j,k}^n) \\ p_{c^+,j,k}^{n+1} = p_{c^+,j,k}^{n+1} - \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{c^++1,j,k}^n - p_{c^+,j,k}^n) \\ p_{c^++1,j,k}^{n+1} = p_{c^++1,j,k}^{n+1} + \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{c^++1,j,k}^n - p_{c^+,j,k}^n) \end{array} \right. \quad (95)$$

– Corrections pour les faces avant et arrière

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{faire pour } c^- \leq i, k \leq c^+, \\ p_{i,c^-,k}^{n+1} = p_{i,c^-,k}^{n+1} - \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,c^--1,k}^n - p_{i,c^-,k}^n) \\ p_{i,c^--1,k}^{n+1} = p_{i,c^--1,k}^{n+1} + \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,c^--1,k}^n - p_{i,c^-,k}^n) \\ p_{i,c^+,k}^{n+1} = p_{i,c^+,k}^{n+1} - \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,c^++1,k}^n - p_{i,c^+,k}^n) \\ p_{i,c^++1,k}^{n+1} = p_{i,c^++1,k}^{n+1} + \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} (p_{i,c^++1,k}^n - p_{i,c^+,k}^n) \end{array} \right. \quad (96)$$

A ce stade, nous n'avons pas couplé la pression avec le déplacement de la membrane. Pour ce faire, nous utilisons le brave schéma 2-2 pour le déplacement

sur la membrane puis nous prenons en compte la contribution de la membrane en corrigeant de nouveau les noeuds situés de part et d'autre de celle-ci.

- Calcul de l'accélération de la membrane

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{faire pour } c^- \leq i, j \leq c^+ \\ A_{i,j}^n = \frac{c_m^2}{h^2} \left( 4w_{i,j}^n - w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n - w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n \right) \\ \quad + \eta c_m^2 \left( p_{i,j,c^++1}^n - p_{i,j,c^+}^n \right) + \frac{c_m^2}{h^2} \delta_{i,j}^{i_s, j_s} g^n, \end{array} \right. \quad (97)$$

(les indices  $i_s, j_s$  sont les coordonnées de la source sur la grille,  $g^n$  est la valeur de l'ondelette à l'instant  $n\Delta t$ ).

- Calcul du déplacement de la membrane et deuxième correction pour les champs de pression

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{faire pour } c^- \leq i, j \leq c^+ \\ w_{i,j}^{n+1} = 2w_{i,j}^n - w_{i,j}^{n-1} + \Delta t^2 A_{i,j}^n \\ p_{i,j,c^+}^{n+1} = p_{i,j,c^+}^{n+1} + \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} \left( h \rho_a A_{i,j}^n \right) \\ p_{i,j,c^++1}^{n+1} = p_{i,j,c^++1}^{n+1} - \frac{c_a^2 \Delta t^2}{h^2} \left( h \rho_a A_{i,j}^n \right). \end{array} \right. \quad (98)$$

- Condition de Dirichlet prise en compte par antisymétrie du déplacement sur les côtés de la membrane

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{faire pour } c^- \leq j \leq c^+ \\ w_{c^++1,j}^{n+1} = -w_{c^+,j}^{n+1}, \quad w_{c^--1,j}^{n+1} = -w_{c^-,j}^{n+1} \\ \text{faire pour } c^- \leq i \leq c^+ \\ w_{i,c^++1}^{n+1} = -w_{i,c^+}^{n+1}, \quad w_{i,c^--1}^{n+1} = -w_{i,c^-}^{n+1} \end{array} \right. \quad (99)$$

Pour finir, il ne reste plus qu'à évaluer à l'instant  $n+1$  les pressions sur les faces externes du cube de calcul. Pour ce faire, on utilise le schéma, décrit dans les sections précédentes, avec 5 fractions rationnelles à coefficients de Padé. Cette résolution s'effectue en trois étapes.

- On transfère les valeurs du champ  $p$  sur les 6 faces immédiatement voisines aux bords absorbants dont on vient de calculer l'état au temps  $n+1$ .

$$\left(u^{(z^+)}\right)_{i,j,\otimes^-}^{n+1} = p_{i,j,n_z-1}^{n+1}, \quad \left(u^{(y^-)}\right)_{k,i,\otimes^-}^{n+1} = p_{i,2,k}^{n+1},$$

et des formules identiques pour les quatre autre faces.

- On utilise l'algorithme de résolution pour les faces puis les arêtes et les coins. On calcule ainsi les faces d'indice  $\otimes^+$  au temps  $n+1$ .
- On transfère les valeurs obtenues vers le cube de calcul  $p$

$$p_{i,j,n_z}^{n+1} = \left(u^{(z^+)}\right)_{i,j,\otimes^+}^{n+1}, \quad p_{i,1,k}^{n+1} = \left(u^{(y^-)}\right)_{k,i,\otimes^+}^{n+1},$$

et des formules identiques pour les quatre autre faces.

Cette manière d'organiser les calculs présente deux avantages. Elle permet tout d'abord de bien séparer le traitement du cube de celui des bords, ce qui permet la réutilisation des modules des CLA pour d'autres structures de données en changeant uniquement les modules de transfert des données. Ensuite, la structure de données pour les CLAs, décrites dans la section "Notation", permet de ne coder qu'un seul module par face, arête ou coin. On paye néanmoins ces points positifs par une duplication de 12 faces du volume de calcul.

## 5.2 Expérience numérique

Le jeux de paramètres (adimensionnés) pour la simulation est tiré de [10]. On prend

$$c_a = 1, \quad c_m = 2, \quad \rho_a = 1, \quad \eta = 0.125, \quad \ell = 3$$

où  $\ell$  est la longueur des arêtes de la caisse. La source est localisée au milieu de la membrane, son ondelette est donnée par

$$g(t) = \left( \cosh^2(6(t - \tau/2)) \right)^{-1} \mathbf{1}_{[0, \tau]}(t), \quad (\tau = 1.7) \quad (100)$$

Le pas de discrétisation retenu est fixé à 0.05, le pas de temps à  $\tau/100 = 0.017$ . On prend une valeur légèrement inférieure à la CFL

$$\Delta t_{CFL} = \min \left( \frac{h}{c_a \sqrt{3}}, \frac{h}{c_m \sqrt{2}} \right).$$

La taille du problème est de 100 nœuds dans les deux directions horizontales et 150 nœuds dans la direction verticale. La caisse du tambour est maillée sur 60 nœuds de grilles. Les bords absorbants sont localisés à 20 mailles de chaque côté de la caisse à l'exception de la face supérieure qui est à 70 mailles de la membrane. Cette disposition permet de visualiser le champ émis par la membrane qui joue le rôle d'un baffle. Huit Photographies d'une coupe verticale du champ dans le plan de la source sont données sur les figures 5 et 6. L'évolution du déplacement au centre de la membrane est décrite sur la figure 7. On notera le caractère antisymétrique du champ par rapport au plan de la membrane au début de l'évolution de la perturbation et la vitesse double de la propagation le long de la membrane par rapport à la vitesse de propagation dans l'air. Ensuite, le champ se complique de part les nombreuses réflexions, tout d'abord sur les arêtes du tambour puis dans la caisse elle-même, où un phénomène de quasi-résonnance apparaît.

Ce qui nous intéresse ici, en fait, ..., ne se voit pas. Aucune réflexion ne naît sur le bord du domaine de calcul. C'est encore net sur les dernières photographies bien que la direction de propagation de l'onde émise à la verticale de la membrane fait un angle très ouvert avec les normales des faces latérales ( $\theta \approx \arctan(70/20) = 66$  degrés pour l'onde émise du bord du tambour et reçue sur le coin haut du domaine de calcul).

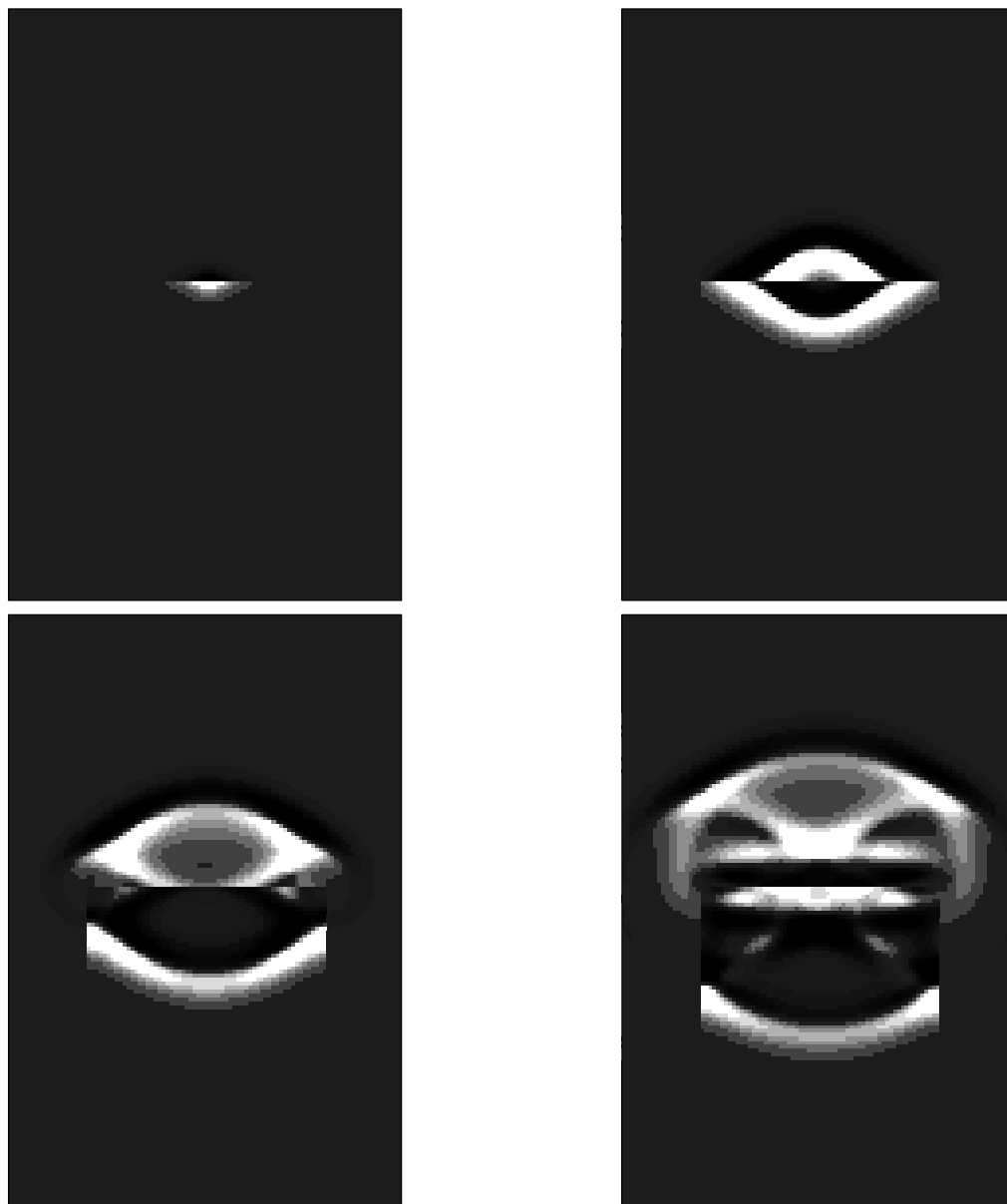


FIG. 5 – 4 premières photographies d'une coupe verticale dans le plan de la source du champ de pression

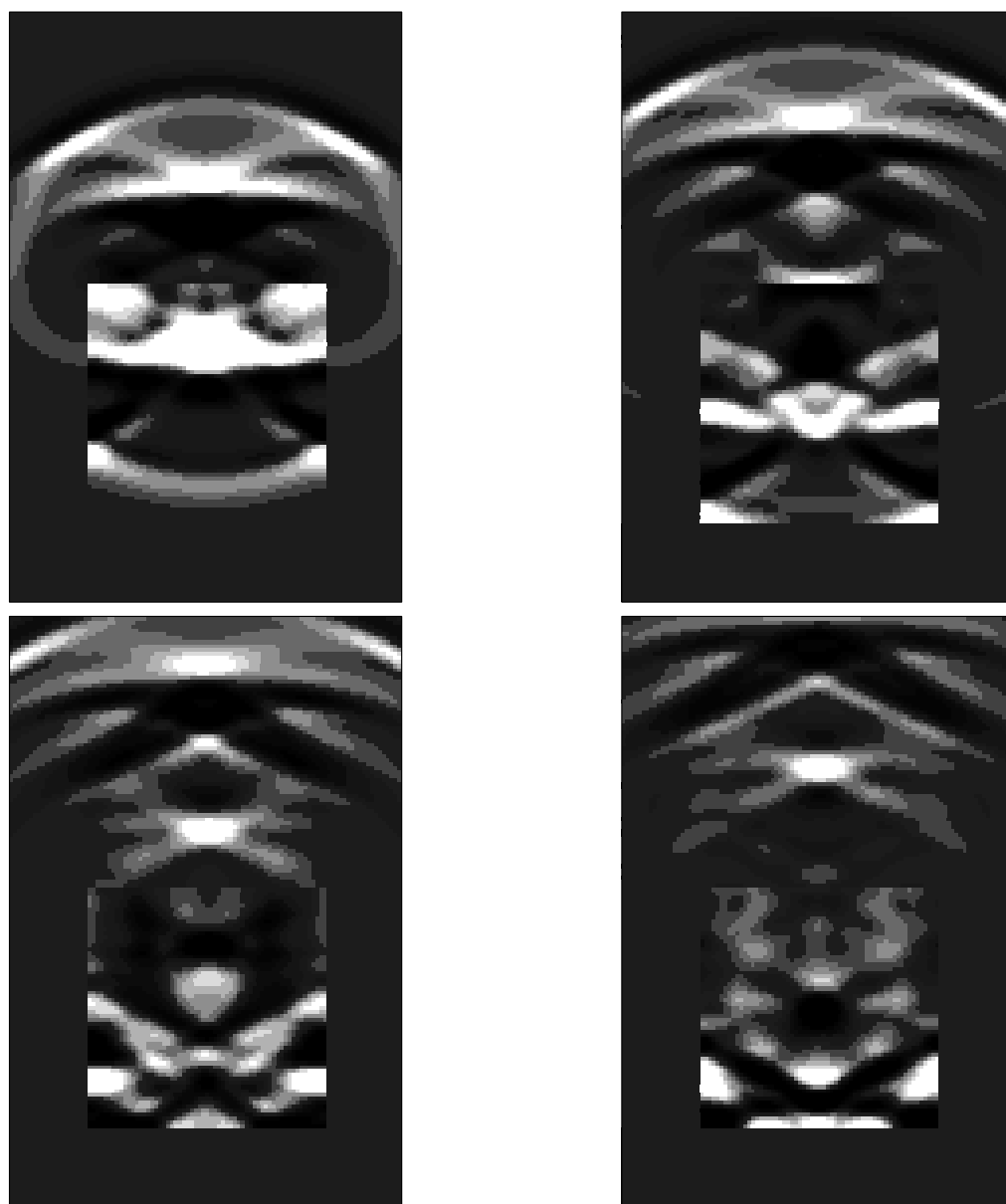


FIG. 6 – 4 photographies d'une coupe verticale du champ de pression

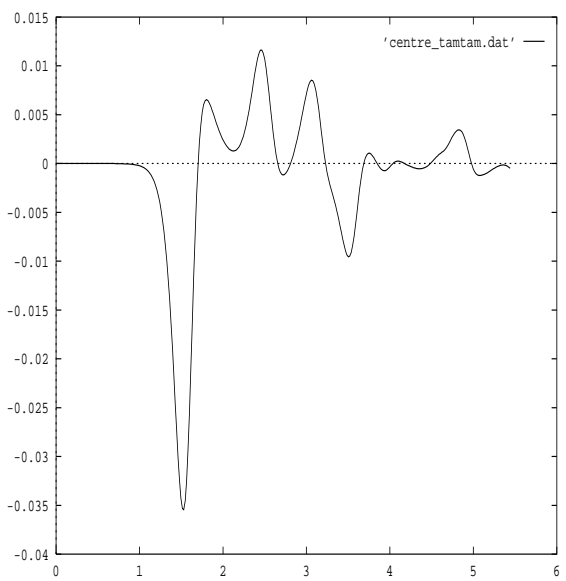


FIG. 7 – évolution temporelle du déplacement de la membrane au cours du temps.

## Références

- [1] R. J. Astley and G.J. Macaulay. Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering. *J. of Sound and Vibrations*, 170(1):97–118, 1994.
- [2] A. Bamberger, B. Engquist, L. Halpern, and P. Joly. Construction et analyse d'approximations paraxiales en milieu hétérogène. part 2: Approximation d'ordre supérieur. Technical Report 128, C.M.A.P Ecole Polytechnique, Mars 1985.
- [3] A. Chaigne and A. Ramdane. Numerical simulations of membrane-mallet interaction in kettledrums. *Manuscript*, 1995.
- [4] F. Collino. Conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé pour les modèles de propagation d'onde. Problème des domaines rectangulaires. Technical Report 1790, INRIA Rocquencourt, France, Novembre 1992. 130 pages.
- [5] T. Ha Duong and P. Joly. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. part 1: The homogeneous case. Technical Report 1306, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Octobre 1990.
- [6] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, Juillet 1977.
- [7] D. Givoli. Non reflecting boundary conditions. *Jour. Comp. Phys*, 94(1), Mai 1991.
- [8] M.J. Grote and J.B.Keller. Non reflecting boundary conditions for times dependant scattering. *J. of Comp. Physics.*, 1996. accepted for publication.
- [9] R.L. Higdon. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *SIAM review*, 28, 1977.



- [10] G.A. Kriegsmann and C.L. Scandrett. Numerical studies of acoustic pulse scattering by baffled two dimensional membranes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(1):9–17, January 1986.
- [11] E.L. Lindmann. Free-space boundary conditions for the time dependant wave equation. *Jour.Comp. Phys.*, 18, 1975.
- [12] L. Trefethen and L. Halpern. Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.*, 47:437–459, 1986.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Conditions absorbantes pour l'équation des ondes amorties</b>	<b>4</b>
2.1	Introduction . . . . .	4
2.2	Cas du demi-espace . . . . .	4
2.3	Cas du huitième d'espace: détermination des conditions d'arête et de coin . . . . .	6
2.3.1	Position du problème . . . . .	6
2.3.2	Construction de la famille de solutions particulières . . .	8
2.3.3	Conditions d'arêtes . . . . .	9
2.3.4	Détermination des conditions de coin . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Notations</b>	<b>16</b>
3.1	Variables d'espace . . . . .	16
3.2	Variable temporelle . . . . .	17
3.3	Paramètres décrivant la physique . . . . .	17
3.4	Paramètres pour la CLA . . . . .	18
3.5	Notations pour le cube . . . . .	18
3.6	Notations pour les faces . . . . .	19
3.7	Notation pour les arêtes . . . . .	20
3.8	Notations pour les coins . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Description des équations et discrétisation</b>	<b>22</b>
4.1	Équations pour les faces absorbantes . . . . .	22
4.1.1	Les équations dans le domaine du continu . . . . .	22
4.1.2	Les équations dans le domaine discret . . . . .	22
4.1.3	La récurrence explicitée . . . . .	23
4.1.4	Un algorithme de résolution . . . . .	25
4.2	Équations pour les arêtes associées à deux faces absorbantes . .	27
4.2.1	Les équations dans le domaine du continu . . . . .	27
4.2.2	Les équations dans le domaine discret . . . . .	28
4.2.3	La récurrence explicitée . . . . .	31
4.2.4	Un algorithme de résolution . . . . .	33
4.3	Traitement du champ acoustique le long des arêtes . . . . .	37

---

4.4	Équations pour les coins associés à trois faces absorbantes . . .	41
4.4.1	Les équations dans le domaine du continu . . . . .	41
4.4.2	Les équations dans le domaine discret . . . . .	42
4.4.3	La récurrence explicitée . . . . .	44
4.4.4	Un algorithme de résolution . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Illustration de la méthode</b>	<b>52</b>
5.1	Description du modèle et discrétisation . . . . .	52
5.2	Expérience numérique . . . . .	57



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399